

自然利率的人口结构视角解释*

朱超 易祯

摘要：利率是链接实体经济和虚拟经济的重要经济变量。自然利率描述了利率的潜在趋势，可作为观测利率的基准。本文构建从一个引入人口年龄结构的 DSGE 模型，测算和比较了全球 194 个国家 1960-2017 年自然利率，并人口结构视角解释自然利率。研究发现：(1) 模型测算结果显示，自然利率能够反映观测利率走势，其表现与市场观测利率贴合，且数值模拟结果也表明，正向的少年人口冲击会引起自然利率上升。(2) 基于全球 182 个国家 1960-2017 年面板数据的经验证据也支持人口结构显著影响自然利率，表现为少年 (0-24 岁) 人口占比正向、中年 (45-64 岁) 和老年 (65 岁及以上) 人口占比负向。本文的实证检验和数值模拟均表明，人口年龄结构显著决定自然利率，影响方向表现为少年人口占比正向、中年和老年人口占比负向。其中，劳动生产率、劳动数量和资本积累作为中间渠道分别传递了 1.75%、7.93% 和 2.55% 的间接效应。本文选择不受短期市场干扰的自然利率，更好地匹配了人口结构慢变量。本文作了新的建模尝试，将人口结构通过与年龄相关的消费引入一般均衡模型测算了自然利率。文中测算的 194 个国家的自然利率数据集，也可以为后续研究提供参考和比较。本文的政策意义体现在，从人口结构角度解释自然利率，可从长期人口变化中预判未来利率。随着全球人口重心上移，自然利率将有下行压力。同时，各国将出现与不同人口结构相适应的基础利率水平，而这有可能在全球资源配置中体现趋势性影响。

关键词：人口结构 自然利率 DSGE

中图分类号：F820

JEL：D24, E43, J11

A Demographic Explanation of Natural Rate of Interest

ZHU Chao YI Zhen

(Capital University of Economics and Business, Beijing, China)

Abstract: This paper attempts to understand the natural interest rate from the perspective of demographic structure. We construct a DSGE model with the demography and calculate the natural interest rates of 194 economies across the world. Firstly, the empirical results from panel data of 182 countries from 1960 to 2017 show that there is a significantly positive correlation between the fraction of the population aged 45 or over and the natural interest rate, while this is negative for the cohort aged between 0 to 24. Secondly, the natural interest rate can be served as benchmark for market interest rates. Thirdly, a positive young population shock will cause a positive response to natural interest rates. This simulation confirms the empirical findings. Our study suggests that demographic structure plays an important role in predicting natural interest rate in the future. With population ageing and slowdown in population growth, natural interest rate will face a downward trend, which might have substantial impacts on resource allocation across the world.

Keywords: Demography; Natural Interest Rates; DSGE

*朱超，首都经济贸易大学金融学院，邮政编码：100070，电子邮箱：zhuchao@cueb.edu.cn；易祯，首都经济贸易大学金融学院，邮政编码：100070，电子邮箱：yizhen@cueb.edu.cn。本文受教育部人文社会科学规划基金项目“全球低(负)利率背景下人口结构与自然利率研究”(17YJA790100)、国家自然科学基金面上项目“人口学视角下风险态度、全要素生产率与金融资产收益率研究”(71873092)和教育部人文社会科学青年基金项目“长期风险模型中的消费跨期决策研究”(20YJC790167)的资助。感谢匿名审稿人的修改建议，文责自负。

一、引言

利率是链接实体经济和虚拟经济的重要经济变量。图 1 (A) 表明, 1980 年代以来, 部分工业国家名义利率开始了长达 30 年的下降趋势, 低利率是否是未来利率的永久性格局? 这一问题的答案对于经济、资产价格和货币政策而言尤为重要。自维克赛尔提出自然利率 (Natural Interest Rate) 的概念以来, 这一满足产出与潜在产出相等、物价稳定条件的短期实际利率, 就开始成为宏观经济和货币政策的核心变量之一。作为一个潜变量, 自然利率可视为市场观测利率的基准。当观测利率 (或实际利率) 高于自然利率时, 投资下降, 经济收缩; 反之, 实际利率低于自然利率时, 经济扩张。自然利率的定义包含三个层次: 与实物资本收益率或生产率相符的利率、与资本供求一致的利率、保持物价中性的利率。正如李宏瑾等 (2016) 所言, 这三个层次分别对应了自然利率的基本内涵、形成和决定过程、作用范围。

自然利率描述利率的长期趋势并过滤短期波动, 可以在货币政策调节经济增长中发挥锚定作用 (Giammarioli & Valla, 2004; 石柱鲜等, 2006; 李宏瑾、苏乃芳, 2016; 李宏瑾等, 2016)。实际利率偏离自然利率时, 经济政策往往难以达到预期目标。准确地测算自然利率, 并作为市场利率和货币政策的重要参考, 就具有重要理论价值和实践意义。因此, 本文将运用多种方法测算全球 194 个国家 1960-2017 年自然利率。这是本文的第一个工作。

本文的另一个工作是从人口结构视角理解自然利率。部分研究已经显示, 全球范围内自然利率呈现下行趋势 (李宏瑾, 2018; Benati, 2019; Krustev, 2019; 徐忠、贾彦东, 2019)。这也体现在历史数据之中, 图 1 描述了部分工业国家 1960-2015 年名义利率与抚养比趋势。图 1 表明, 在抚养比较低的 20 世纪 80 年代, 名义利率恰好处于高位。而随着近 30 年来抚养负担的加大, 利率也一路走低, 二者呈现出相反的走向。历史数据给了本文一个直观的认识, 人口结构与利率之间可能存在某种联系。本文关心这只是偶然的巧合, 还是这两大趋势背后可能有着必然的理论联系。如果人口结构与利率之间的联系得以确立, 其重要性体现在可从长周期人口结构变化中预判未来利率趋势。

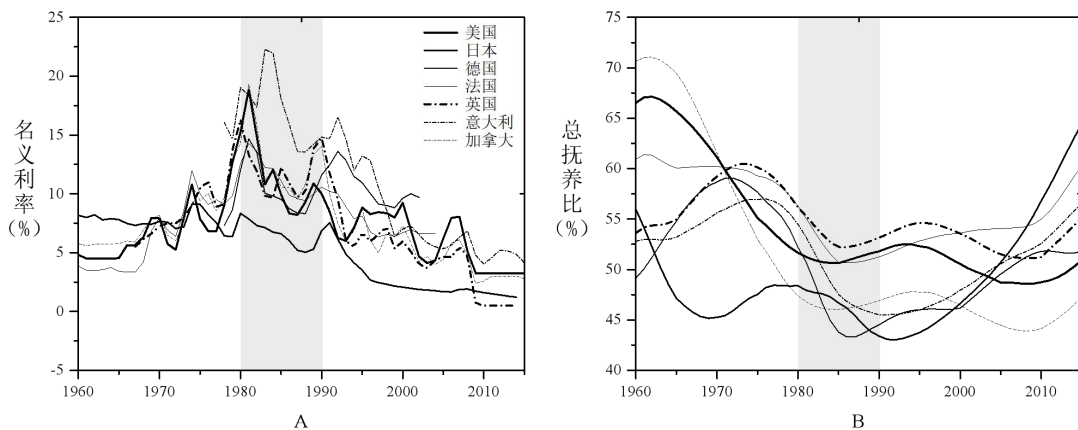


图 1 部分工业国家 1960-2015 年名义利率与抚养比

资料来源: 世界银行世界发展指标 (World Development Indicators, WDI) 数据库。

注: 图中国家包括美国、日本、德国、法国、英国、意大利和加拿大, 名义利率数据为 WDI 数据库中的 Lending interest rate(%) 指标, 总抚养比数据为 WDI 数据库中的 Age dependency ratio(% of working-age population) 指标。

与本文的两个主要工作对应, 文献也分为两类。第一类是自然利率的测算, 第二类人口结构如何解释利率。

第一类文献讨论自然利率的测算并分析其决定因素。自然利率的测算思路主要分为五种。

(1) 单变量时间序列平滑。其背后思想是自然利率可理解为可观测变量的成分, 如自然利率反映市场利率内在趋势, 因此可通过观测利率的算术平均 (Archibald & Hunter, 2001)、滤波 (Amato, 2005) 平滑而得。(2) 多变量时间序列计算。这一方法将自然利率理解为其其他经济变量的函数, 如长短期利差、消费波动率等, 通过函数关系直接计算, 可以分为基于收益率曲线的方法 (Basdevant et al, 2004) 和 CCAPM 模型 (Giammarioli & Valla, 2004) 两种方法。(3) 多变量时间序列估计。自然利率也可看作泰勒 (Taylor) 规则中的均衡利率 (Gerdesmeier & Roffia, 2004)、实际利率决定方程中的常数项 (Lubik & Matthes, 2015) 等, 可通过回归方法测算。(4) 基于主观设定的状态空间模型。状态空间模型方法将自然利率考虑为宏观经济潜在变量, 建立自然利率与观测变量的状态空间模型, 测算自然利率。状态空间模型可基于收益率曲线 (Basdevant et al, 2004) 或其他经济变量 (Cuaresma et al, 2004) 主观设定。(5) 基于一般均衡的状态空间模型。状态空间模型也可从一般均衡框架中构建, 一般包含利率、产出、通货膨胀、自然利率和潜在产出等经济变量 (Laubach & Williams, 2003; 石柱鲜等, 2006; Edge et al, 2008; 李宏瑾、苏乃芳, 2016; 李宏瑾等, 2016; Holston et al, 2017)。本文将采取不同的测算方法获得自然利率, 以相互印证。

自然利率的决定其实也隐含在测算方法之中, 可归纳为三个方面。第一, 通货膨胀和产出缺口。在多变量时间序列估计中, Taylor 规则中的常数项可视为自然利率的估计值, 自然利率受该规则中其他两个变量通货膨胀和产出缺口的影响 (Gerdesmeier & Roffia, 2004)。基于主观设定的状态空间模型估计中, Cuaresma et al (2004) 也认为通货膨胀和产出缺口的趋势将影响自然利率。第二, 消费波动率。消费资本资产定价模型 (CCAPM) 建立了自然利率与消费波动的联系, 认为自然利率变化来源于消费不确定性, 可通过多变量时间序列计算得出 (Giammarioli & Valla, 2004)。第三, 潜在产出增长率。在动态一般均衡 (Dynamic General Equilibrium, DGE) 和动态随机一般均衡 (Dynamic Stochastic General Equilibrium, DSGE) 的状态空间模型中, 自然利率与潜在产出存在联系 (Laubach & Williams, 2003; 石柱鲜等, 2006; 李宏瑾等, 2016; Holston et al, 2017)。

第二类文献关注人口结构如何解释利率。在理论层面, Carvalho et al (2016) 在生命周期 (Life-Cycle) 模型框架下讨论了人口结构与利率的联系, 发现人口结构的两种变化 (人口增长率和抚养比) 均能改变利率水平。Lisack et al (2017) 建立的世代交叠模型 (Overlapping Generation Model, OLG) 模型解释了 20 世纪 80 年代开始的利率下行趋势, 发现随着 50 岁及以上人口占比上升, 长期内利率将下降。Ikeda & Saito (2014) 建立以劳动力占比作为人口变量的 DGE 模型也发现人口结构是利率的长期决定因素, 老龄化引起长期内利率下降。其他一些理论研究发现利率行为可拆分为长期均值稳定和短期均值复归两个过程, 人口增长率和预期寿命改变能帮助解释长期内利率均值下行 (Summers, 2014; Eichengreen, 2015)。

在经验证据层面, 部分样本数据显示老年经济体风险溢价较高, 对应较高的收益率, 如美国 1900-1990 年数据 (Bakshi & Chen, 1994)。另一部分样本数据表明, 年长的工作年龄人口会引起收益率上升 (Arnott & Chaves, 2012), 而来自 16 个 OECD 国家 1960-2011 年样本的证据显示, 中年-年轻人口比率的倒数长期内显著正向决定利率水平, 人口结构变化是导致利率长期变动的重要因素 (陈国进、李威, 2013)。

结合人口结构与利率、自然利率的决定因素两部分文献成果, 人口年龄结构会通过两条渠道影响自然利率。

第一, 生产率。一方面, 人口结构与生产率之间存在潜在联系, 表现为: ①年龄较大的劳动者由于工作经验的积累拥有较高的劳动生产率, 而年轻的劳动者则在身体健康、学习能力等方面占有优势; ②人口结构变化可能会造成生产率较低的服务部门产品需求改变, 如老龄化将带来医疗保健服务等需求上升, 从而改变生产率; ③人口规模和人口密度也可能通过网络聚集效应而刺激 TFP 变化。代表性研究如 Feyrer (2007、2008) 在全球样本中发现,

劳动力年龄结构改变显著影响生产率变化，年龄分布与生产率呈现倒“U”型关系，40-49 岁年龄组生产率最高，并且富有国家和贫穷国家生产率差距可以通过年龄结构差异解释。另一方面，人口结构带来的生产率改变会影响自然利率。表现为：①人口结构等因素带来 TFP 上升，家庭未来预期收入提高，增加当前消费，自然利率将上升。如果自然利率上升幅度不够，将增加资本超额需求和产出缺口推动自然利率上行（Barsky et al, 2014）；②较高的生产率对应较高的资本边际报酬，而后者与自然利率密切相关（Edge, 2008; Ikeda & Saito, 2014; Carvalho et al, 2016）。因此，人口结构变化会通过改变生产率而决定自然利率。

第二，资本和劳动。一方面，储蓄投资行为和劳动供给的生命周期变化，使得不同的人口年龄结构对应不同的资本积累和劳动供给；另一方面，人口结构变化引起的资本和劳动改变，将影响和决定资本-劳动比率，从资本的边际产出角度改变资本回报率，决定自然利率（Andrés et al, 2009; Laubach & Williams, 2003、2016; 陈国进、李威, 2013）。

本文的对于现有文献有三点贡献。（1）本文与前有文献的一个重要区别是连接了人口结构与自然利率，而不是市场利率。这是因为，可观测名义利率是资金的名义价格，易受市场短期供求状况的干扰。实际利率还会受到价格水平因素的影响。而自然利率是潜在变量，可以作为市场观测利率的基准，更重要的是，如果其测算来源于一般均衡模型，较容易排除掉市场名义价格的干扰。另一方面，自然利率是潜变量，过滤掉了短期波动因素，与人口结构这一慢变量的联系更为匹配。（2）本文的第二个贡献是建立一般均衡模型，将人口结构通过与年龄相关的消费引入模型，架起了人口结构与自然利率的理论联系。就本文对文献的了解，这样的人口结构进入方式是一种有效尝试。（3）本文对于这一领域文献的第三个贡献是，本文建立统一的 DSGE 框架测算了 194 个国家的自然利率，形成全球面板数据集，这既为本文量化分析自然利率与其他宏观经济变量的联系提供了数据基础，也可以为后续研究提供参考和比较。

本文的主要结论为：人口结构显著决定自然利率，影响方向表现为少年人口占比正向、中年和老年人口占比负向。理论模型模拟和经验研究均支持了这样的发现。劳动生产率、劳动数量和资本积累作为中间渠道分别传递了 1.75%、7.93%和 2.55%的间接效应。后文第二部分建立理论模型，第三部分为数值模拟及自然利率的测算和讨论，第四部分为经验研究，第五部分结合中国事实讨论，最后总结全文。

二、DSGE 理论模型

本文建立 DSGE 模型测算和解释自然利率。理论模型包括四个经济部门：家庭部门、生产部门（包括最终产品厂商和中间产品厂商）和中央银行。通过将消费分为少年消费和成年消费，将人口年龄结构引入 DSGE 模型。

（一）家庭部门

假设家庭无限存活，每期对消费、劳动和实际货币持有进行决策，使其终生效用最大化。效用函数相对风险回避系数不变，且消费和实际货币持有边际效用为正，劳动供给边际效用为负。参考 Lisack et al（2017）的建模思路，从消费异质性中引入人口年龄结构。本文假设消费由少年消费和成年消费组成，消费加总采取 CES 形式。预算约束等式中，支出端包括实际消费、实际货币持有和实际债券购买，收入端包括工资收入、上一期持有货币和债券收入。从家庭部门决策的一阶条件中，可推导出封闭经济的 IS 曲线。

家庭 i 每期收入包括工资收入、持有债券收入，用于消费、持有实际货币余额和购买债券。参考 Fernández-Villaverde et al（2010）等文献对家庭行为进行刻画，假设家庭 i 的效用函数包括消费 c_{it} （由少年消费 c_{it}^y 和成年消费 c_{it}^o 通过 CES 加总而得）、劳动 l_{it} 和实际货币余

额 M_{it}/p_t ，效用函数形式如（1）式。该效用函数形式保证相对风险回避系数不变，同时保证消费和实际货币持有量边际效用为正，劳动供给边际效用为负。家庭决策问题可由（1）式和（2）式表示的优化问题进行描述。

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{\left[w_t^y c_{it}^y \frac{\theta-1}{\theta} + (1-w_t^y) c_{it}^o \frac{\theta-1}{\theta} \right]^{\frac{\theta(1-\sigma_c)}{\theta-1}}}{1-\sigma_c} + \phi_m \frac{m_{it}^{1-\sigma_m}}{1-\sigma_m} - \phi_l \frac{l_{it}^{1-\sigma_l}}{1-\sigma_l} \right\} \quad (1)$$

$$s.t: c_{it}^y + c_{it}^o + \frac{M_{it}}{p_t} + \frac{B_{it}}{p_t} = w_t l_{it} + \frac{M_{it-1}}{p_t} + R_t \frac{B_{it-1}}{p_t} \quad (2)$$

式（1）中， c_{it}^y 、 c_{it}^o 、 m_{it} 、 M_{it} 、 l_{it} 分别为实际少年消费、实际成年消费、实际货币余额、名义货币余额、实际劳动供给， $m_{it}=M_{it}/p_t$ ， w_t^y 为少年人口占比， p_t 为价格水平， β 表示家庭主观贴现率； σ_c 、 σ_m 和 σ_l 分别表示消费、现金持有和提供劳动的相对风险回避系数， ϕ_m 和 ϕ_l 分别为实际货币余额和劳动在效用函数中的权重， θ 为少年消费和成年消费的替代弹性。式（2）中， B_{it} 为持有债券数量， w_t 为实际工资水平， R_t 为名义债券收益率。

本文从家庭决策一阶条件中，可以导出包含人口年龄结构的封闭经济 IS 曲线：

$$\sigma_c \vartheta (\hat{y}_{t+1} - \hat{y}_t) = \vartheta \mathbb{E}_t (\hat{R}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1}) + \left[1 + \vartheta - \frac{\theta}{2(1-w_{ss}^y)} + \frac{\sigma_c \vartheta \theta}{w_{ss}^y - 1} \right] (\hat{w}_{t+1}^y - \hat{w}_t^y) \quad (3)$$

其中，下标“ss”表示稳态变量，“^”符号表示对稳态的偏离比例。为简化书写，定义过渡参数 $\vartheta = (\theta-1)/(1-\sigma_c\theta)$ 。

（二）生产部门

社会产品分为最终产品和中间产品，目的是将产品的生产和消费过程分离。相同类型企业之间没有异质性，可直接加总。最终产品用于满足家庭消费需求和投资需求，中间产品用于生产最终产品。最终产品产量依据家庭的消费需求确定。中间产品的生产需要使用劳动，劳动由家庭提供，生产过程由科布-道格拉斯（C-D）生产函数刻画。从生产部门决策一阶条件中能够推导出封闭经济的 AS 曲线。

1.最终产品。家庭消费和投资由最终产品进行提供，最终产品生产厂商利用中间产品进行生产。设中间产品连续分布于区间[0,1]，由于最终产品市场完全竞争，最终产品生产优化问题可以由（4）和（5）式进行刻画。其中 y_t 表示最终产品供给， y_{jt} 为第 j 类中间产品总需求， p_{jt} 为第 j 类中间产品价格水平。

$$\max_{y_{jt}} p_t y_t - \int_0^1 p_{jt} y_{jt} dj \quad (4)$$

$$s.t: y_t = \left(\int_0^1 y_{jt}^{(\varepsilon-1)/\varepsilon} dj \right)^{\varepsilon/(\varepsilon-1)} \quad (5)$$

其中， ε 为中间产品替代弹性。

最终厂商最优决策一阶条件为：

$$y_{jt} = (p_{jt}/p_t)^{-\varepsilon} y_t \quad (6)$$

$$p_t = \left(\int_0^1 p_{jt}^{1-\varepsilon} dj \right)^{1/(1-\varepsilon)} \quad (7)$$

2.中间产品。中间产品生产厂商利用劳动进行生产，生产过程由 C-D 生产函数刻画。产品供最终产品生产使用，产量依据最终产品市场需求确定。劳动由家庭直接提供。中间产品

市场对劳动的需求取决于工资水平，以及最终产品市场对中间产品的需求。中间产品厂商生产函数由（8）式刻画。

$$y_{jt} = A_t l_{jt}^{1-\alpha} \quad (8)$$

式（8）中 y_{jt} 为第 j 类中间产品的总供给， l_{jt} 生产第 j 类中间产品所使用的劳动， A_t 为全要素生产率，满足外生 AR(1) 过程； $1-\alpha$ 为劳动产出占总产出的比重。

假设中间产品市场垄断竞争，遵循 Calvo 策略定价。设每期能够进行价格调整的厂商比例为 $(1-\theta_p)$ 。如果中间厂商在 t 期进行了价格调整， $t+1$ 期中间产品价格为 $p_{j,t+1} = \pi_t^p p_{jt}$ ， π_t 表示最终产品市场通货膨胀水平， χ_p 表示中间产品市场和最终产品市场的通货膨胀水平之比。中间产品生产厂商最优定价策略可以等价于求解最优化问题（9）和（10）式。

$$\max_{p_{jt}} \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \theta_p)^s \frac{\lambda_{t+s}}{\lambda_t} \left\{ \left[(\pi_t^{\chi_p} \pi_{t+1}^{\chi_p} \dots \pi_{t+s-1}^{\chi_p}) \frac{p_{jt}}{p_{t+s}} - mc_{t+s} \right] y_{j,t+s} \right\} \quad (9)$$

$$s.t: y_{j,t+s} = \left((\pi_t^{\chi_p} \pi_{t+1}^{\chi_p} \dots \pi_{t+s-1}^{\chi_p}) \frac{p_{jt}}{p_{t+s}} \right)^{-\varepsilon} y_{t+s} \quad (10)$$

其中， mc_t 为生产中间产品的边际成本。

求解式（9）和（10），最优价格水平 p_t^* 可以写为 $p_t^* = p_t^1 / p_t^2$ ，其中 p_t^1 和 p_t^2 由（11）和（12）式决定。

$$p_t^1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \lambda_t mc_t y_t + \pi_t^{-\chi_p \varepsilon} \beta \theta_p \mathbb{E}_t [p_{t+1}^1 \pi_{t+1}^{\chi_p \varepsilon}] \quad (11)$$

$$p_t^2 = \lambda_t y_t + \pi_t^{\chi_p (1-\varepsilon)} \beta \theta_p \mathbb{E}_t [p_{t+1}^2 \pi_{t+1}^{\chi_p (\varepsilon-1)}] \quad (12)$$

中间产品市场的价格由单个厂商价格加总而得，化简后的加总方程为：

$$p_t = \left[\theta_p (\pi_{t-1}^{\chi_p} p_{t-1})^{1-\varepsilon} + (1-\theta_p) (p_t^1 / p_t^2)^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad (13)$$

式（11）中， λ_t 是与家庭优化问题相关的 Lagrange 乘子，这是联系家庭决策问题和厂商决策问题的纽带。

本文从厂商决策一阶条件中能够推导出包含人口年龄结构的新凯恩斯菲利普斯曲线，即 AS 曲线：

$$\hat{\pi}_t = \psi_1 \hat{y}_t - \psi_2 \hat{y}_t^n + \psi_3 \mathbb{E}_t [\hat{\pi}_{t+1}] - \psi_4 \hat{w}_t^y \quad (14)$$

其中， y_t^n 为对数线性化后的潜在产出。为简化书写，引入 ψ_1 、 ψ_2 、 ψ_3 、 ψ_4 作为过度参数，其具体表达式为：

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \kappa_0 [\sigma_c - 1 - (\sigma_l - 1) / \alpha] \\ \psi_2 &= \kappa_0 [(1 - \alpha) / \alpha] [\sigma_c - \sigma_l + 1 - (\sigma_l - 1) / (1 - \alpha)] \\ \psi_3 &= \beta \theta_p [\theta_p / (1 - \theta_p) + \chi_p] / [\theta_p / (1 - \theta_p) + \beta \theta_p \chi_p] \\ \psi_4 &= \kappa_0 \left[(\sigma_l - 1) (1 / \alpha) \frac{1 - \alpha}{1 - \sigma_l} + 1 \right] \left[\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\sigma_c \theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \right] \\ \kappa_0 &= (1 - \beta \theta_p) / (\theta_p / (1 - \theta_p) + \beta \theta_p \chi_p) \\ \kappa_1 &= w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y)^\theta w_{ss}^{y(1-\theta)} \left[\frac{\theta w_{ss}^y}{(w_{ss}^y - 1)} + 1 - \theta \right] + \kappa_2 \\ \kappa_2 &= \vartheta \left[w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y)^\theta w_{ss}^{y(1-\theta)} \right] \end{aligned}$$

（三）中央银行

中央银行以名义利率为中介目标，满足 Taylor 规则。发达国家中央银行通常将利率或

通货膨胀作为中介目标，也有部分国家将广义货币供给（M2）增速作为中介目标。随着非银行类金融机构的快速发展和利率市场化的推进，以 M2 为目标的政策有效性有所减弱。利率在央行调控中发挥着越来越重要的作用。本文假设中央银行调控遵循 Taylor 规则，对数线性化形式为：

$$\hat{R}_t = \gamma_R \hat{R}_{t-1} + (1 - \gamma_R) [\gamma_\pi \hat{\pi}_t + \gamma_y (\hat{y}_t - \hat{y}_t^n)] \quad (15)$$

其中， R 、 π 、 Δy^d 为稳态名义利率、稳态通货膨胀和稳态产出缺口， γ_R 、 γ_y 、 γ_π 分别为利率参数、价格参数和产出参数。

（四）自然利率

自然利率和潜在产出为市场无摩擦时的实际利率和产出。本文定义中间产品市场无垄断时，所有厂商均能在每期调整价格，中间产品价格完全弹性时的利率和产出即为自然利率与潜在产出。定义 $\theta_p=0$ 时的利率和产出为自然利率与潜在产出。由此可得：

$$(1 - 1/\varphi) \hat{y}_t^n = \hat{A}_t \quad (16)$$

$$\sigma_c (\hat{y}_t - \hat{y}_t^n) = \mathbb{E}_t [\hat{R}_{t+1}^n] \quad (17)$$

其中， R_t^n 为对数线性化后的自然利率。

本文从家庭、厂商和中央银行行为中分别获得宏观经济的产品市场出清曲线（IS 曲线）、总供给曲线（AS）和总需求曲线（AD），并在无摩擦环境下求解潜在产出和自然利率，可根据式（3）、（14）、（15）、（16）、（17）五个方程确定的状态空间模型，测算自然利率。

我们还从引入人口年龄结构的 DSGE 模型中，推导了自然利率、潜在产出、产出、通货膨胀、名义利率之间的联系。理论模型中明晰了人口结构影响自然利率的可能渠道。

第一，全要素生产率。根据家庭决策一阶条件和厂商决策一阶条件，可以导出少年人口占比、全要素生产率和潜在产出关系的表达式。全要素生产率可以写为少年人口占比的函数 $A_t = A(\hat{w}_t^y)$ 。结合式（16）和（17），自然利率可以看作 A_t 增长率的函数。因此，少年人口占比可以通过全要素生产率决定自然利率。

这一渠道也可以直观解释为：少年人口比例的变化，会通过教育程度、身体素质、熟练程度等因素导致劳动生产率的变化。如果由于人口变化带来全要素生产率上升，那么对应的潜在产出上升，均衡条件下资本的边际回报率上升，自然利率上升，反之则反之。

本文分析得出人口结构会通过全要素生产率决定自然利率的政策意义体现在，如果人口结构变化引起全要素生产率改变，那么将会从两方面作用于政策调控效果：一方面，由于消费存在生命周期变化规律，人口结构变化会导致消费需求变化，如人口老龄化会引起有效消费需求不足，这是人口结构的直接效应。另一方面，如果人口结构改变引起全要素生产率增长率下降，那么整体经济技术进步速度放缓，则社会投资机会下降，这将直接导致有效投资需求不足，这是人口结构的间接效应。有效投资需求不足和有效消费需求不足共同加大通货紧缩压力，此时实际利率将高于自然利率，经济将存在收缩压力，并很难将实际利率下降至与均衡利率匹配的水平。因此，在政策调控经济时需充分考虑人口结构因素。

第二，劳动和资本。本文最终使用的状态空间模型中并不包含劳动和资本变量，但实际上这两个变量是传递人口结构效应的中间渠道。一方面，从需求角度，根据家庭决策一阶条件，可以得到人口结构、消费和劳动表达式，结合产品市场出清条件，产出被用于消费和储蓄。那么，人口年龄结构将通过劳动和资本影响产出，并通过均衡条件决定自然利率。另一方面，从供给角度，劳动是生产要素，决定潜在产出并最终作用于自然利率。

三、数值模拟

（一）参数先验分布与后验分布

本文构建的状态空间模型涉及 9 个结构参数，先验分布根据文献设定：第一，取值为 $[0, 1]$ 的参数服从 beta 分布；第二，取值为 $[1, +\infty)$ 的参数服从 gamma 分布；第三，取值为 $(-\infty, +\infty)$ 的参数服从正态分布。先验分布设定结果见表 1。

随后本文利用全球 194 个国家或地区（包括 35 个发达经济体和 159 个发展中经济体）实际 GDP 和少年人口（0-24 岁）占比数据作为输入数据，采用贝叶斯方法估计参数并求解了式（3）、（14）、（15）、（16）、（17）描述的一般均衡框架。实际 GDP 采用世界银行 WDI 数据库中的 GDP (constant 2010 US\$) 指标，少年人口占比数据来源于世界银行 HNPS 数据库。表 1 汇总了模型涉及参数的后验分布描述性统计，并与 Christiano et al（2005）、Smets & Wouters（2007）和 Fernández-Villaverde et al（2010）估计参数的后验分布进行比较。主观贴现因子（ β ）、消费相对风险回避系数（ σ_c ）、劳动供给相对风险回避系数（ σ_l ）、每期不调价的厂商比例（ θ_p ）、资本产出弹性（ α ）估计结果与文献结果相近。

表 1 模型参数后验分布

符号	含义	先验分布	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
			全世界		发达经济体		发展中经济体		CEE	SW	JFV
			均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差			
β	主观贴现因子	B(0.99, 0.002)	0.9900	0.0019	0.9901	0.0019	0.9899	0.0020	0.9926	0.9984	0.998
σ_c	消费 CRRA	$\Gamma(1.5, 0.1)$	1.5133	0.0854	1.4982	0.0835	1.5173	0.0859	1	1.38	1
σ_l	劳动供给 CRRA	$\Gamma(1.5, 0.1)$	1.4771	0.0720	1.4914	0.0732	1.4734	0.0716	3.26	1.83	1.17
θ_p	价格粘性参数	B(0.7, 0.2)	0.6982	0.1464	0.6892	0.1431	0.7005	0.1472	0.60	0.66	0.82
χ_p	市场间通胀之比	B(0.5, 0.15)	0.4981	0.1450	0.5053	0.1418	0.4962	0.1458	1	0.24	0.63
α	资本产出弹性	B(0.35, 0.02)	0.3496	0.0191	0.3499	0.0188	0.3495	0.0192	0.36	0.19	0.21
γ_R	Taylor 规则参数	N(0.5, 0.15)	0.5122	0.1101	0.5099	0.1020	0.5128	0.1121	--	0.81	0.77
γ_π	Taylor 规则参数	N(0.5, 0.15)	0.5055	0.1467	0.5058	0.1443	0.5054	0.1474	--	0.39	0.30
γ_y	Taylor 规则参数	N(0.5, 0.15)	0.5363	0.1315	0.5294	0.1324	0.5381	0.1313	--	0.02	0.04

注：表中 B(μ, σ^2) 表示 beta 分布， $\Gamma(\mu, \sigma^2)$ 表示 gamma 分布，N(μ, σ^2) 表示正态分布，其中 μ 为均值， σ 为标准差。CEE 表示 Christiano 等（2005），SW 表示 Smets 和 Wouters（2007），JFV 表示 Fernández-Villaverde 等（2010）。

（二）自然利率的测算结果与讨论

我们运用包含人口年龄结构的 DSGE 模型测算了全球 194 个国家 1960-2017 年自然利率。作为对照，我们还运用单纯时间序列 HP 滤波方法测算的自然利率、Laubach & Williams（2003）模型测算的自然利率、不包含人口年龄结构的 DSGE 模型（标准的 DSGE 模型）三种替代的测算方法进行测算和比较，并与观测利率进行了对比。具体为：（1）单纯时间序列 HP 滤波方法测算方法。鉴于数据可得性和操作可行性，本文采用 HP 滤波方法，从实际利率历史数据中提取长期趋势测算自然利率。（2）基于 Laubach & Williams（2003）模型的测算方法。Laubach & Williams（2003）建立了一个包含利率、产出、通货膨胀、劳动供给等变量的状态空间模型用于测算自然利率（简称为 LW 模型），这一模型延续了 Woodford（2003）对于自然利率的定义，并逐渐成为估计自然利率的规范性模型。我们利用对数 GDP 作为输入变量，采用贝叶斯-卡尔曼滤波方法估计了 LW 模型。本部分测算自然利率使用的样本包括 194 个国家 1960-2017 年数据。（3）基于不含人口变量的 DSGE 模型测算的自然利率。我们在一个不包含人口年龄结构的 DSGE 模型中推导了状态空间模型，利用对数 GDP 作为输入变量，采用贝叶斯-卡尔曼滤波方法估计了自然利率。（4）最后是观测利率数据。包括货币政策基准利率、贷款利率、短期债券利率和长期债券利率。篇幅所限，本部分比较内容的理论模型和详细数据备索。

自然利率能够较好反映观测利率的长期趋势和短期波动,不同方法测算的自然利率也具有类似的变化特征。作为比较,我们还在表 2 汇总了上述三个理论模型测算的自然利率与观测利率之间的利率缺口 ($r_t^* - r_t$) 的描述性统计结果。在均值的角度,与单纯时间序列 HP 滤波方法相比,基于状态空间模型的 LW 模型、标准的 DSGE 模型和包含人口结构的 DSGE 模型测算的自然利率与观测利率的利率缺口均值更小。与王博、陈开璞(2019)修正后的状态空间模型类似,本文的三个状态空间模型测算的自然利率结果较为接近,但在发展中经济体样本中,包含人口结构的 DSGE 模型测算的自然利率,能好反映观测利率的变化情况。当然,自然利率与观测利率在定义上并不相同,因此表 2 的比较结果并不能完全作为评价自然利率结果的依据。但考虑到观测利率以自然利率为“锚”,而后者又是经济中的潜变量,不可观测,如果二者偏离太大,则可能反映理论模型模拟失误。因此,我们以表 2 中自然利率和观测利率之间的利率缺口作为评价测算的自然利率的参考,但不完全作为评价依据。

表 2 不同模型测算的自然利率比较结果汇总

利率缺口	R1		R2		R3		R4	
	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差
全样本								
包含人口的 DSGE	0.0006	0.1761	0.0043	0.2327	0.0125	0.1713	0.0112	0.1589
HP 滤波	-0.0725	0.0701	-0.0634	0.0710	-0.0822	0.0811	-0.0727	0.0452
LW	-0.0028	0.1079	-0.0041	0.1821	0.0047	0.0949	-0.0042	0.0780
标准的 DSGE	0.0048	0.1128	0.0039	0.1141	0.0067	0.0951	0.0001	0.0789
发达经济体								
包含人口的 DSGE	0.0364	0.1374	0.0418	0.1427	0.0534	0.1426	0.0182	0.1413
HP 滤波	-0.0489	0.0434	-0.0393	0.0249	-0.0501	0.0410	-0.0659	0.0377
LW	0.0252	0.0470	0.0218	0.0487	0.0370	0.0551	0.0005	0.0548
标准的 DSGE	0.0213	0.0549	0.0257	0.0550	0.0407	0.0625	0.0055	0.0601
发展中经济体								
包含人口的 DSGE	-0.0130	0.1871	-0.0068	0.2522	-0.0035	0.1788	-0.0021	0.1873
HP 滤波	-0.0797	0.0751	-0.0700	0.0778	-0.0919	0.0876	-0.0808	0.0517
LW	-0.0134	0.1218	-0.0117	0.2049	-0.0080	0.1039	-0.0131	0.1090
标准的 DSGE	0.0147	0.1268	-0.0025	0.1257	-0.0067	0.1022	-0.0101	0.1051

注: (1) 表中三种模型均以对数 GDP 为输入变量,估计方法为贝叶斯-卡尔曼滤波方法; (2) R1、R2、R3、R4 分别表示以经 GDP 平减指数调整的货币政策基准利率、贷款利率、短期政府债券利率、长期政府债券利率测算的自然利率,数据分别来源于国际货币基金组织国际金融统计(International Financial Statistics, IFS)数据库中的 Monetary Policy-Related Interest Rate, Percent per annum 指标、世界银行世界发展指标(World Development Indicators, WDI)数据库中的 real interest rate (%)指标、IFS 数据库中的 Treasury Bills, Percent per annum 指标、IFS 数据库中的 Government Bonds, Percent per annum 指标。

(三) 人口冲击与自然利率

本文在效用函数式(1)中引入人口冲击,讨论少年人口冲击对自然利率的影响,因模型中仅引入了少年人口占比和成年人口占比,一个正向的少年人口冲击,相当于一个负向的成年人口占比冲击。因此本部分只需讨论少年人口冲击对自然利率的影响。效用函数修正为:

$$\left[e_t w_t^y c_{it}^{y \frac{\theta-1}{\theta}} + (1 - w_t^y) c_{it}^{o \frac{\theta-1}{\theta}} \right]^{\frac{\theta(1-\sigma_c)}{\theta-1}} \left| (1 - \sigma_c) + \phi_m \frac{m_{it}^{1-\sigma_m}}{1 - \sigma_m} - \phi_l \frac{l_{it}^{1-\sigma_l}}{1 - \sigma_l} \right. \quad (18)$$

其中, e_t 为少年人口冲击,满足 AR(1)过程。

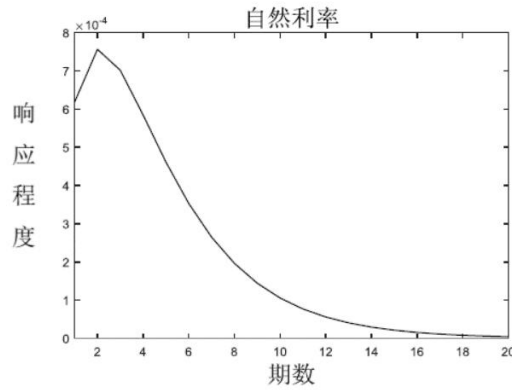


图2 少年人口占比冲击下的自然利率脉冲响应

本文将一个正向的少年人口冲击下自然利率的脉冲响应绘制于图2。可以看出，正向的少年人口占比冲击会引起自然利率当期出现正向响应，响应在第2期达到最大值之后开始出现下降，并在20期前后回到稳态水平。

本部分在一个包含人口年龄结构的DSGE模型中测算了自然利率，并模拟了少年人口冲击对自然利率的影响，发现：（1）自然利率可作为观测利率的基准，自然利率表现与观测利率（包括贷款利率、短期政府债券利率和长期政府债券利率）贴合，具有相同短期变化特征；（2）从均值角度，引入人口年龄结构的DSGE模型能够更好刻画观测利率；（3）少年人口占比上升，会引起自然利率上升。与之对应，成年（中年和老年）人口占比上升则会引起自然利率下降。

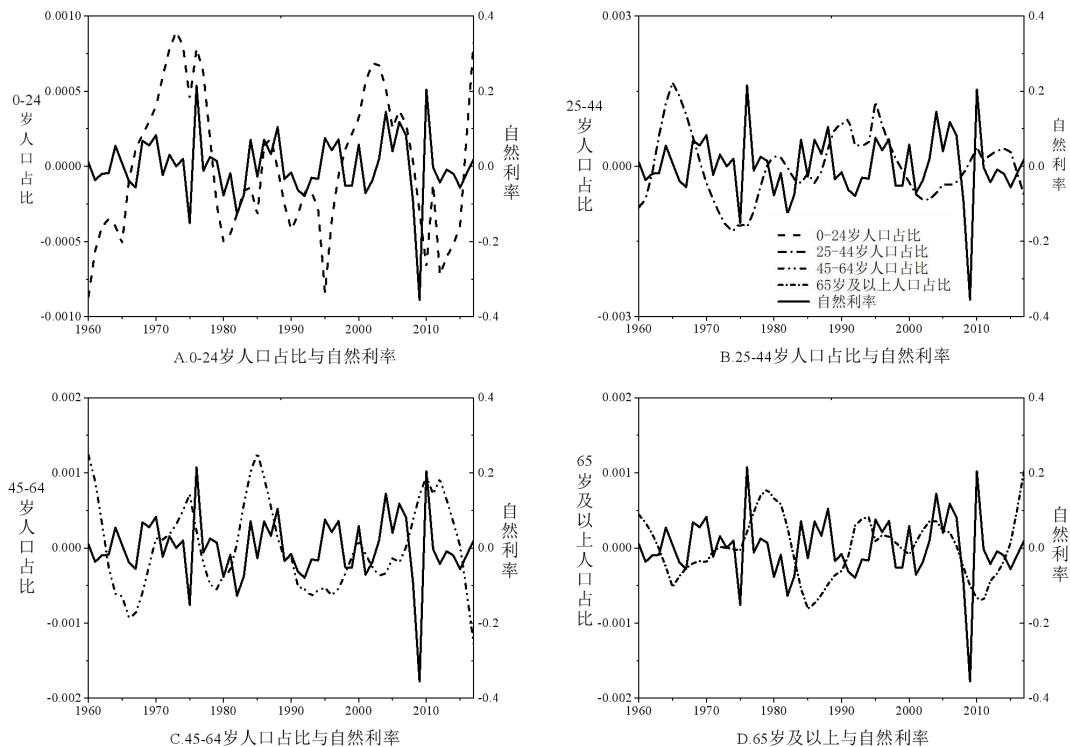


图3 人口结构与自然利率

注：图中人口年龄占比经HP滤波处理。

我们也绘制了1960-2017年人口年龄结构与自然利率时间序列，图3可以看出，少年人

口占比与自然利率同向变化，而中年和老年人口占比的上升，往往伴随自然利率的下降。我们将从寻找这一关系的经验证据，并从实证层面探寻影响渠道。

四、人口结构与自然利率：经验证据

（一）模型、变量与数据

本部分建立实证模型，寻找人口结构影响自然利率的经验证据。被解释变量为自然利率。解释变量分为两类，一类是人口年龄结构变量，用于讨论自然利率的人口学决定因素；另一类是控制变量，用于控制其他因素对因变量的影响。为防止回归结果由于严重多重共线性而出现估计不一致，本文在基准模型估计中将人口变量进行分别估计。基准估计模型为：

$$R_{it} = \alpha_0 + \alpha_k D_{it}^{(k)} + \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \eta_t + v_{it} \quad (19)$$

式（19）中， R_{it} 为自然利率， $D_{it}^{(k)}$ 为第 k 个（共 n 个）人口变量， \mathbf{X}_{it} 为控制变量矩阵； α_0 和 $\alpha_k (k=1,2,\dots,n)$ 为常数项和解释变量系数， $\boldsymbol{\beta}$ 为控制变量参数矩阵； μ_i 为个体异质性，控制不可观测的国家差异； η_t 表示时间固定效应，控制与时间相关的变量； v_{it} 为随机扰动项。

进一步，本文考虑到自然利率的均值复归，将其滞后期引入式（19），基准模型修正为：

$$R_{it} = \alpha_0 + \rho R_{i,t-1} + \alpha_k D_{it}^{(k)} + \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \eta_t + v_{it} \quad (20)$$

其中， ρ 为自然利率的自回归系数。

本部分使用的被解释变量自然利率来自第三部分的数值模拟结果。关于人口变量，文献中人口年龄分组主要有两种方式：（1）将人口按照年龄分为少年人口（0-24岁）、年少的中年人口（25-44岁）、年长的中年人口（45-64岁）和老年人口（65岁及以上）4组（Goyal, 2004; Davis, 2007）；（2）对年龄进行进一步细分。部分文献已将人口组距细分为10岁（Feyrer, 2008），还有部分文献以5岁为组距进行细分（Arnott & Chaves, 2012）。本文同时选择了上述两种方式寻找人口变量，验证自然利率人口结构效应的年龄异质性。

式（19）和（20）使用的控制变量依据理论分析和文献研究选取。根据定义，自然利率是与潜在产出匹配的实际利率，与生产过程密切相关。一方面，从长期来看，技术变迁、劳动人口的变化、资本形成的改变均会改变潜在增长率，导致自然利率的长期趋势发生改变（石柱鲜等，2006）；另一方面，根据 Taylor 规则，自然利率应受通货膨胀和产出缺口的影响（Gerdesmeier & Roffia, 2004）。由于本文回归时使用的变量均为实际变量，实证方程可不包含物价。因此，本文使用的控制变量包括产出增长率、劳动人口和资本形成，代理变量分别为实际 GDP 增长率、劳动人口占比和资本形成总额占 GDP 比重。

本文先采用固定效应（FE）估计式（19），而对于式（20），解释变量中加入了被解释变量利率的滞后期 $R_{i,t-1}$ ，即使采用 FE 估计也是不一致的。此时需要采用系统广义矩估计（SYS-GMM）方法估计系数。

（二）估计结果

1.基准估计结果。本文首先将人口按照年龄分为0-24岁、25-44岁、45-64岁和65岁及以上四组作为解释变量，以本文引入人口年龄结构的 DSGE 模型测算的自然利率作为被解释变量，估计方程（19）和（20）。表3报告了全样本、发达经济体和发展中经济体的固定效应和系统广义矩估计结果。估计中还包含常数项和控制变量系数，篇幅所限未作报告，结果备索。表3结果显示，人口结构显著影响自然利率，在方向上表现为0-24岁人口占比正向、45岁及以上年龄组负向影响自然利率。

表 3 人口结构与自然利率估计结果汇总表

解释变量	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	全样本		发达经济体		发展中经济体	
	固定效应	系统广义矩	固定效应	系统广义矩	固定效应	系统广义矩
0-24 岁 人口占比	0.3027*** (0.0455)	0.0401* (0.0233)	0.1700** (0.0753)	0.2186 (0.1568)	0.3877*** (0.0657)	0.0598** (0.0280)
25-44 岁 人口占比	-0.4960*** (0.0944)	-0.1352 (0.1164)	-0.1822 (0.1410)	-0.6461 (0.4604)	-0.6112*** (0.1145)	-0.1876 (0.1795)
45-64 岁 人口占比	-0.5763*** (0.0972)	-0.0897* (0.0531)	-0.3153** (0.1514)	-0.3555 (0.3058)	-0.7646*** (0.1420)	-0.1123** (0.0556)
65 岁及以上 人口占比	-0.6409*** (0.1515)	-0.0922 (0.0682)	-0.3132 (0.1899)	-0.8129 (0.6394)	-1.3527*** (0.2691)	-0.2776* (0.1432)

注：括号内为异方差稳健标准误，*、**、***分别表示回归系数在 10%、5%和 1%的水平上显著。为防止出现多重共线性，本文将人口变量逐一放入回归方程，表中为系数统计结果。动态面板 SYS-GMM 估计结果中，Sargan 检验不能拒绝工具变量有效的原假设，AR (2) 检验不能拒绝一阶差分方程的随机误差项中不存在二阶序列相关的原假设，具体估计结果备索。

进一步地，为了更细致地展现人口结构对自然利率的影响，本文还以 5 岁为组距将人口细分为 17 组，分别作为解释变量进行了回归。图 4 的估计结果支持了 4 组年龄分组的结论，人口占比对自然利率的影响方向依旧表现为 0-24 岁各年龄组（0-4 岁、5-9 岁、10-14 岁、15-19 岁、20-24 岁）人口占比正向、45 岁及以上年龄组（45-49 岁、50-54 岁、55-59 岁、60-64 岁、65-69 岁、70-74 岁、75-79 岁和 80 岁及以上）负向，25-44 岁各年龄组（25-29 岁、30-34 岁、35-39 岁和 40-44 岁）人口占比对自然利率的影响方向连接了少年正向、年长的中年和老年负向两个阶段。

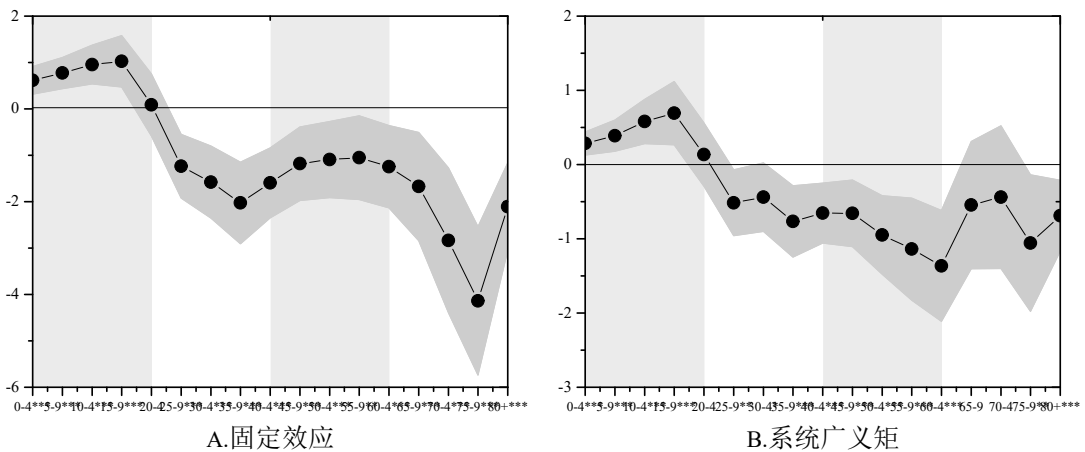


图 4 分年龄段基准估计结果汇总表

注：图中描点为不同年龄段系数估计值，深色阴影部分为对应的置信区间，横轴不同年龄段上角*、**、***分别表示回归系数在 10%、5%和 1%的水平上显著，浅色阴影分割了表 3 中 0-24 岁、25-44 岁、45-64 岁和 65 岁及以上四个年龄段。

2.异质性分析。我们从经济发展程度、收入水平和时间三个层面考察人口年龄结构对自然利率的异质性影响。第一，经济发展程度。根据 IMF (World Economic Outlook) 中的 Advanced Economies List，将全球样本分为发达经济体和发展中经济体，估计结果见表 3 第 (3) - (6) 栏。第二，收入水平。根据世界银行 2017 年公布的高收入经济体名单，将全样本分为高收入经济体和中低收入经济体两个子样本估计式 (2)，估计结果见表 4 第 (1) 和 (2) 栏。第三，时间。基准估计的样本区间为 1960-2017 年，我们以 1980 年和 2000 年为节点，将全样本分为 1960-1980、1981-2000、2001-2017 年三个子样本估计式 (2)，估计结

果见表 4 第 (3) 和 (5) 栏。我们的异质性分析结果显示, 在不同经济发展程度、不同收入水平和不同时间段的子样本中, 人口年龄结构对自然利率的影响方向表现为少年正向、中年和老年负向, 基准估计结果没有表现出显著的异质性。

表 4 异质性分析估计结果汇总表

解释变量	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	收入水平		时间		
	高收入	中低收入	1960-1980	1981-2000	2001-2017
0-24 岁人口占比	0.7211*** (0.1208)	0.0652 (0.0826)	0.1875** (0.0748)	0.1036 (0.0757)	0.4853*** (0.0751)
25-44 岁人口占比	-0.5504* (0.2823)	-0.1684 (0.2235)	0.1812 (0.2700)	-0.2018 (0.2206)	-0.1260 (0.2432)
45-64 岁人口占比	-1.2048*** (0.2109)	-0.1399 (0.1793)	-0.4313** (0.1852)	-0.3845*** (0.1808)	-1.0063*** (0.1498)
65 岁及以上人口占比	-1.6582*** (0.2639)	-0.4830* (0.2513)	-0.7251*** (0.2121)	-0.5307*** (0.2020)	-1.4672*** (0.1491)

注: 表中估计方程为式 (20), 估计方法为系统广义矩。

(三) 人口结构与自然利率传导渠道

继从理论模型中分析了人口年龄结构与自然利率的联系, 我们将继续从实证角度来验证传导渠道。

1. 渠道的考虑。本文从引入人口年龄结构的 DSGE 模型中, 推导了自然利率、潜在产出、产出、通货膨胀、名义利率之间的联系。理论模型中明晰了人口结构影响自然利率的可能渠道。一为生产率。少年人口占比可以通过生产率决定自然利率。少年人口比例的变化, 会由于教育程度、身体素质、熟练程度等因素导致劳动生产率的变化。如果由于人口变化带来生产率上升, 对应的潜在产出上升, 均衡条件下资本的边际回报率上升, 自然利率上升, 反之则反之。二为劳动和资本。劳动和资本也从需求和供给两方面传递人口结构对自然利率的影响。一方面, 从需求角度, 人口年龄结构将通过劳动和资本影响产出, 并通过均衡条件决定自然利率。另一方面, 从供给角度, 劳动是生产要素, 决定潜在产出并最终作用于自然利率。

文献中较少直接讨论人口结构与自然利率的中介效应, 但分别讨论了人口结构与渠道变量、渠道变量与自然利率的关系。第一, 人口结构影响渠道变量。人口结构直接影响劳动数量, 而伴随人口年龄结构的储蓄投资行为生命周期变化和劳动力特征, 影响了劳动生产率 (Feyrer, 2007、2008)、劳动数量 (Francis & Ramey, 2009; 邓明, 2014) 和资本积累 (Mierau & Turnovsky, 2014; Backus et al, 2014; 耿志祥等, 2016)。第二, 渠道变量决定自然利率。劳动生产率上升, 会带来家庭未来预期收入提高, 增加当前消费, 影响利率 (Barsky et al, 2014)。而劳动数量和资本积累会影响和决定潜在产出, 影响自然利率 (Andrés et al, 2009; Laubach & Williams, 2003、2016)。

2. 渠道识别。多个渠道变量的识别需建立结构方程模型 (Structure Equation Model, SEM)。本文建立包含人口结构、自然利率、劳动生产率、劳动数量、资本积累和其他控制变量的结构方程模型, 识别人口结构效应的传导渠道。

本文建立的联立方程模型写为:

$$R_{it} = \alpha_0 + \rho R_{i,t-1} + \alpha_k D_{it}^{(k)} + \phi_1 \varepsilon_{it} + \phi_2 l_{it} + \phi_3 k_{it} + \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \eta_t + v_{it} \quad (21)$$

$$\varepsilon_{it} = \alpha_1 + \rho_1 \varepsilon_{i,t-1} + \varphi_{1,k} D_{it}^{(k)} + \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \eta_t + v_{it} \quad (22)$$

$$l_{it} = \alpha_2 + \rho_2 l_{i,t-1} + \varphi_{2,k} D_{it}^{(k)} + \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \eta_t + v_{it} \quad (23)$$

$$k_{it} = \alpha_3 + \rho_3 k_{i,t-1} + \varphi_{3,k} D_{it}^{(k)} + \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \eta_t + v_{it} \quad (24)$$

其中, ε_{it} 、 l_{it} 、 k_{it} 分别表示劳动生产率、劳动数量和资本积累, α_j 、 ρ_j 、 ϕ_j 、 $\varphi_{j,k}$ ($j=1, 2, 3$) 分别表示式 (22) - (24) 中的常数项, 劳动生产率、劳动数量和资本积累的自回归系数, 劳动生产率、劳动数量和资本积累对自然利率的边际影响系数, 人口结构对劳动生产率、劳动数量和资本积累的边际影响系数。如果人口结构影响自然利率的直接效应成立, 那么 α_k 显著; 如果劳动生产率、劳动数量和资本积累的渠道效应成立, 那么 ϕ_j 、 $\varphi_{j,k}$ 需同时显著, 此时间接效应表示为 ϕ_j 和 $\varphi_{j,k}$ 的乘积。

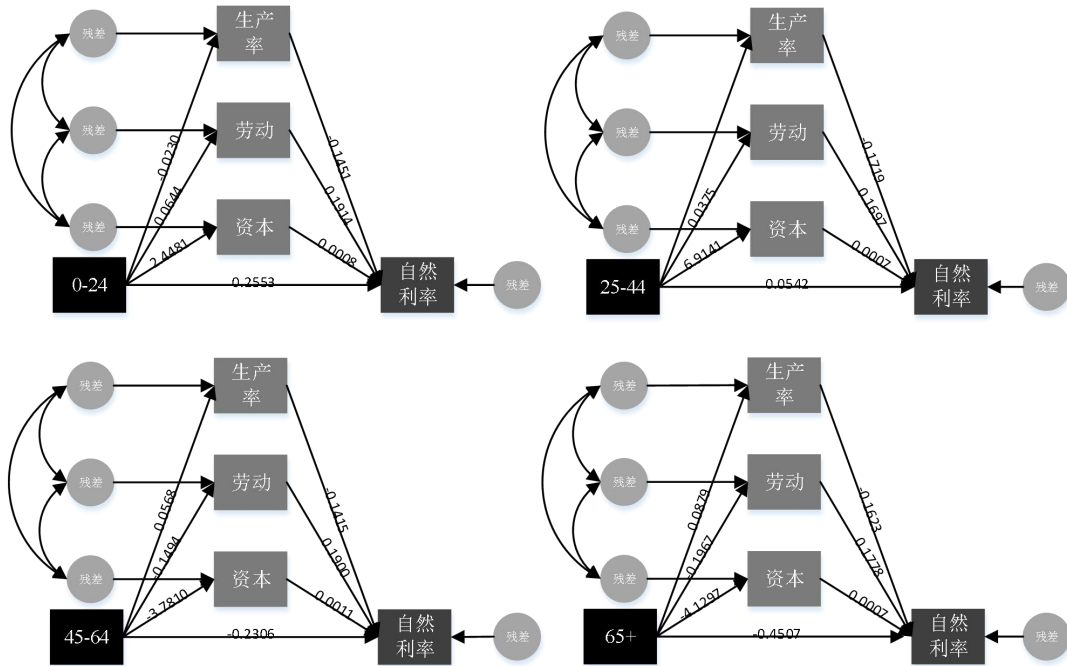


图 5 渠道效应结构方程模型估计结果汇总图

注: 图中 A、B、C、D 分别为 0-24 岁、25-44 岁、45-64 岁和 65 岁及以上人口占比影响自然利率的渠道估计, e1-e4 为结构方程模型残差项。

本部分涉及的劳动生产率、劳动数量和资本积累数据均来自宾大世界表 (Penn World Table, PWT9.0) (Feenstra et al, 2015), 选取的代理指标分别为 rtfpna、rmp 和 rkna。图 5 汇报了 0-24 岁、25-44 岁、45-64 岁和 65 岁及以上人口占比对自然利率影响的渠道估计。估计时固定了国家和时间虚拟变量, 并通过残差考虑了三条渠道之间的相关性。图中数字为 5% 显著性水平下显著的系数估计值。可以看出, 劳动生产率、劳动数量和资本积累对人口结构效应均发挥部分渠道作用。

本文还计算了渠道效应大小及在总效应中的占比, 直接效应为式 (21) 中人口结构变量对自然利率的边际影响大小, 间接效应为通过渠道传递的影响大小。表 5 第 (1) - (4) 栏为渠道效应估计大小, 为图 5 中人口变量对渠道变量估计系数与渠道变量对自然利率估计系数的乘积。表 5 中第 (5) - (8) 栏为直接效应和间接效应占总效应的比例。结果显示, 0-24 岁、25-44 岁、45-64 岁和 65 岁及以上人口占比对自然利率影响的直接效应均显著, 劳动生产率、劳动数量和资本积累分别传递人口结构对自然利率影响的算术平均数为 1.75%、7.93% 和 2.55%。

表 5 渠道估计结果汇总表

解释变量	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	
	效应大小				效应比例 (%)				
	0-24	25-44	45-64	65 岁及以上	0-24	25-44	45-64	65 岁及以上	
直接效应	0.2553	0.0542	-0.2306	-0.4507	93.5508	82.8746	85.0295	89.6202	
间接效应	劳动生产率	0.0033	0	-0.0080	-0.0143	1.2092	0	2.9499	2.8435
	劳动数量	0.0123	0.0064	-0.0284	-0.0350	4.5071	9.7859	10.4720	6.9596
	资本积累	0.0020	0.0048	-0.0042	-0.0029	0.7329	7.3395	1.5487	0.5767
总效应	0.2729	0.0654	-0.2712	-0.5029	100	100	100	100	

本部分从经验证据角度考察了人口年龄结构与自然利率之间的联系。经验证据显示，人口结构显著影响自然利率，表现为少年（0-24 岁）人口占比正向、中年（45-64 岁）和老年（65 岁及以上）人口占比负向，年少的中年（25-44 岁）人口占比对自然利率的影响整体对自然利率的影响不显著。但 25-44 岁人口占比对于自然利率的效应正好存在“拐点”，也即连接了少年正向、中老年负向影响自然利率的两个阶段。这些发现支持了理论模型的研究结果。同时，基于经验证据的分析发现，劳动生产率、劳动数量和资本积累作为中间渠道分别传递了 1.75%、7.93%和 2.55%的间接效应。

五、中国的人口结构与自然利率

中国生育政策的调整持续影响人口年龄结构。建国以来，中国人口增长率受生育政策指导的影响。新中国成立至 1957 年，国家生育政策由严禁节育向提倡节育转变，这一时期人口增长率“由高转低”。历史原因导致 1962 年人口出生率出现补偿性回升，1963 年人口出生率高达 43.6‰。1970-1980 年间，中国开始推行计划生育政策，控制人口增长率，缓解经济发展压力，独生子女政策逐步实施。2013 年人口政策开始调整，“全面二胎”政策改变人口出生率，影响中国人口年龄结构。生育政策的实施和调整，使得中国人口结构变化具有特殊性。

中国人口结构正面临深刻变化，这体现在总人口数和人口结构两个方面。

第一，在不到百年的时间内，中国人口数量将出现“倒 U”型反转。根据联合国人口署发布的《世界人口展望》预测，1950-2020 年间，中国人口数量持续增长，但 2020 年后中国人口将出现下降，这一趋势持续到 21 世纪末。基于《世界人口展望》（World Population Prospects, 2017）中低生育率假设下的人口数量估计，中国总人口数在 2068 年首次跌破 10 亿，2100 年下降至 6.13 亿。

第二，中国总抚养比也在 1950-2100 年间经历了趋势性改变。中国总抚养比变化可分为三个阶段。1950-1970 年间，出生率上升带来一次“婴儿潮”，总抚养比出现一次波峰；1970-2015 年间，计划生育政策的实施导致生育率下降，伴随 1950-1970 生育高峰出生的居民进入工作年龄，抚养负担持续下降；2015-2100 年间，1950-1970 年间“婴儿潮”出生的居民逐渐进入退休年龄，老年抚养比引起抚养负担上升。

我们考察了中国人口年龄结构与自然利率的关系。图 6 结果显示，中国人口结构的改变也将伴随自然利率的调整，二者关系整体表现为少年（0-24 岁）人口占比正向、中年（45-64 岁）和老年（65 岁及以上）人口占比负向。这与全球经验证据中的结论吻合。具体而言：第一，0-24 岁人口占比上升，其伴随的创新能力提升，以及抚养需求引起的劳动力数量和资本积累上升，均会引起自然利率提高。第二，45 岁及以上人口占比上升，教育程度和健康状况、劳动力数量和资本积累的下降，均会引起自然利率降低。具体到中国，生育政策的

实施和调整，将伴随未来较长时期内少年人口占比下降、中年和老年人口占比上升，这将在长期内负向影响自然利率。

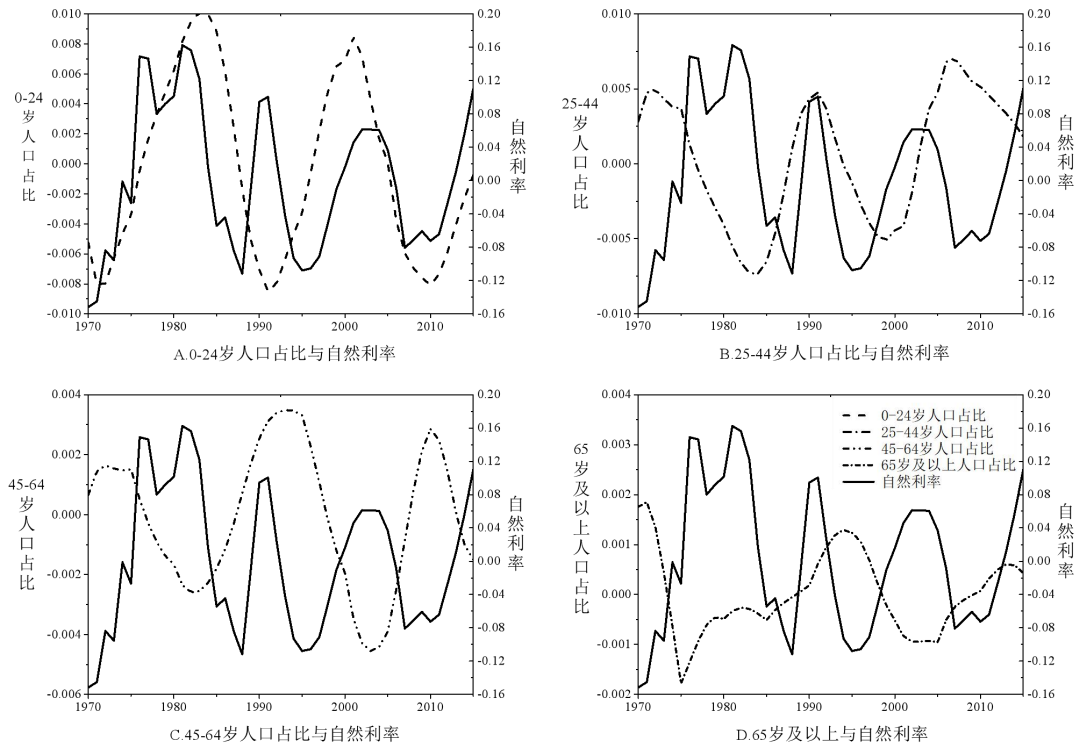


图6 中国人口结构与自然利率

注：图中人口年龄占比经HP滤波处理。

六、结论与政策含义

利率是链接实体经济和虚拟经济的重要经济变量。自然利率描述利率的长期趋势并过滤短期波动，可以对市场观测利率发挥锚定作用。准确地发现和测算自然利率，可以作为市场利率和货币政策的重要参考。从人口结构角度解释自然利率，可作为从长期人口变化中预判未来利率趋势的基础。当观测利率（或实际利率）高于自然利率时，投资下降，经济收缩；反之，实际利率低于自然利率时，经济扩张。也就是说，只有在实际利率低于自然利率，或利率存在负缺口时，才能实现经济扩张。这就要求在实施利率政策时，需充分考虑自然利率的趋势性变化。

经济发展的起点和终点都是人的需求。人口结构虽然缓慢，但是会对经济变量发生趋势性的影响。对自然利率也不例外。在全球老龄化背景下，随着人口重心上移，自然利率均衡水平将有方向性改变。同时，由于人口趋势的差异，各国也有可能出现与不同人口结构相适应的基础利率水平，而这有可能在未来全球资源配置中体现趋势性影响。基于此，我们的研究工作就是构建了一个引入人口年龄结构的DSGE模型，测算了全球194个国家1960-2017年自然利率，模拟了人口年龄结构冲击下的自然利率变化动态，并从数据中寻找证据支持。

本文的主要结论为：人口结构显著决定自然利率，影响方向表现为少年人口占比正向、中年和老年人口占比负向，这在理论模型和经验证据中均成立。具体而言：（1）引入人口年龄结构的DSGE模型数值模拟表明，自然利率能够反映观测利率走势，其表现与市场利率

贴合。我们同时也运用时间序列 HP 滤波、LW 模型、标准 DSGE 模型等替代方法测算了自然利率，本文测算的自然利率能够更好体现观测利率的变化。(2) 基于 DSGE 模型的模拟结果显示，自然利率能够被人口结构解释，正向的少年人口冲击会引起自然利率上升。(3) 全球 182 个国家 1960-2017 年面板数据支持了模型结果，人口结构影响自然利率，表现为少年（0-24 岁）人口占比正向、中年（45-64 岁）和老年（65 岁及以上）人口占比负向。(4) 基于经验证据的结构模型表明，劳动生产率、劳动数量和资本积累作为中间渠道分别传递了 1.75%、7.93% 和 2.55% 的间接效应。

本文研究工作对现有文献相比有明显特点。一是连接了人口结构与自然利率，而不是市场利率。本文旨在排除可观测名义利率所受到的市场短期供求状况的干扰，而自然利率是潜变量，过滤掉了短期波动因素，与人口结构这一慢变量的联系更为匹配。二是在建模过程中，本文将人口结构通过与年龄相关的消费、工资收入和资本积累引入模型，架起了人口结构与自然利率的理论联系。这至少是一种有效的人口结构进入理论模型的切入方式。除此之外，本文在 DSGE 框架下测算的 194 个国家的自然利率，也可以为后续研究提供参考和比较。

对于中国而言，生育政策的实施和调整，人口结构在长期内表现为少年占比下降、中年和老年占比上升，这将对自然利率产生趋势性影响。随着货币政策框架正逐步转向以价格型调控为主，中央银行的政策利率体系已逐步成型，利率机制将在货币政策调控中发挥更大的作用。而老龄化将伴随更低的自然利率水平，将影响到货币政策调控效果，这要求政策调控时更多关注人口结构的趋势性和可预测性变化。姑不论人口政策调整的外生政策变化，在人口结构老化的明确形势下，我们需要在政策利率顺应经济内生趋势，逐步降低利率，适应自然利率下行的趋势，以更好发挥货币政策对于经济的稳定和促进作用。

参考文献

- 陈国进 李威，2013：《人口结构与利率水平研究》，《中国人口科学》第 5 期。
- 邓明，2014：《人口年龄结构与中国省际技术进步方向》，《经济研究》第 3 期。
- 耿志祥 孙祁祥 郑伟，2016：《人口老龄化、资产价格与资本积累》，《经济研究》第 9 期。
- 李宏瑾 2018：《长期性停滞与持续低利率：理论、经验及启示》，《世界经济》第 1 期。
- 李宏瑾 苏乃芳 洪浩，2016：《价格型货币政策调控中的实际利率锚》，《经济研究》第 1 期。
- 李宏瑾 苏乃芳，2016：《货币理论与货币政策中的自然利率及其估算》，《世界经济》第 12 期。
- 石柱鲜 邓创 刘俊生 石庆华，2006：《中国的自然利率与经济增长、通货膨胀的关系》，《世界经济》第 4 期。
- 王博 陈开璞，2019：《金融周期对自然利率的影响：金融失衡视角》，《经济学动态》第 10 期。
- 徐忠 贾彦东，2019：《自然利率与中国宏观政策选择》，《经济研究》第 6 期。
- Amato, J.D.(2005), "The role of the natural rate of interest in monetary policy", *CESifo Economic Studies* 51(4):729-755.
- Andrés, J. et al(2009), "Money and the natural rate of interest: structural estimates for the United States and the Euro Area", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33(3):758-776.
- Archibald, J. & L. Hunter(2001), "What Is the neutral real interest rate, and how can we use it?", *Reserve Bank of New Zealand Bulletin*, 64(3):15-28.
- Arnott, R.D. & D.B. Chaves(2012), "Demographic changes, financial markets, and the economy", *Financial Analysts Journal*, 68(1):23-46.

- Backus, D. et al(2014), “Demography and low-frequency capital flows”, *Journal of International Economics*, 92(S1):S94-S102.
- Bakshi, G. & Z. Chen(1994), “Baby boom, population aging and capital markets”, *Journal of Business*, 67(2):165-202.
- Barsky, R. et al(2014), “The natural rate of interest and its usefulness for monetary policy”, *American Economic Review*, 104(5):37-43.
- Basdevant, O. et al(2004), “Estimating a time varying neutral real interest rate for new zealand”, Reserve Bank of New Zealand Discussion Paper Series, No. DP 2004/01.
- Benati, L.(2019), “Money velocity and the natural rate of interest”, *Journal of Monetary Economics*, Available online 14 September 2019.
- Carvalho, C. et al(2016), “Demographics and real interest rates: Inspecting the mechanism”, *European Economic Review*, 88:208-226.
- Christiano, L.J. et al(2005), “Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy”, *Journal of Political Economy*, 113(1):1-45.
- Cuaresma, J. et al(2004), “Searching for the natural rate of interest: A Euro Area perspective”, *Empirica*, 31(2-3):185-204.
- Davis, E.P.(2007), “How will ageing affect the structure of financial markets”, *Journal of Bacteriology*, 53(3):360-361.
- Edge, R.M. et al(2008), “Natural rate measures in an estimated DSGE model of the US economy”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(8):2512-2535.
- Eichengreen, B.(2015), “Secular stagnation: The long view”, *American Economic Review*, 105(5):66-70.
- Feenstra, R.C. et al(2015), “The next generation of the Penn World Table”, *American Economic Review*, 105(10):3150-3182.
- Fernández-Villaverde, J. et al(2010), “The new macroeconometrics: A bayesian approach”, *Handbook of Applied Bayesian Analysis*, 1:366-399.
- Feyrer, J.(2007), “Demographics and productivity”, *The Review of Economics and Statistics*, 89(1):100-109.
- Feyrer, J.(2008), “Aggregate evidence on the link between age structure and productivity”, *Population and Development Review*, 34:78-99.
- Francis, N. & V.A. Ramey(2009), “Measures of per capita hours and their implications for the technology-hours debate”, *Journal of Money, Credit and Banking*, 41(6):1071-1097.
- Gerdesmeier, D. & B. Roffia(2004), “Empirical estimates of reaction functions for the Euro Area”, *Swiss Journal of Economics and Statistics*, 140(1):37-66.
- Giammarioli, N. & N.Valla(2004), “The natural real interest rate and monetary policy: A review”, *Journal of Policy Modeling*, 26(5):641-660.
- Goyal, A.(2004), “Demographics, stock market flows, and stock returns”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 39(1):115-142.
- Holston, K. et al(2017), “Measuring the natural rate of interest: International trends and determinants”, *Journal of International Economics*, 108(S1):S59-S75.
- Ikeda, D. & M. Saito(2014), “The effects of demographic changes on the real interest rate in Japan”, *Japan and the World Economy*, 32:37-48.
- Krustev, G.(2019), “The natural rate of interest and the financial cycle”, *Journal of Economic Behavior & Organization*, 162:193-210.
- Laubach, T. & J.C. Williams(2003), “Measuring the natural rate of interest”, *The Review of Economics and Statistics*, 85(4):1063-1070.

Laubach, T. & J.C. Williams(2016), “Measuring the natural rate of interest redux”, *Business Economics*, 51(2):57-67.

Lisack, N. et al(2017), “Demographic Trends and the Real Interest Rate.” Bank of England Working Papers, No. 701.

Lubik, T.A. & C. Matthes(2015), “Calculating the natural rate of interest: A comparison of two alternative approaches”, *Richmond Fed Economic Brief*, 2015:1-6.

Mierau, J.O. & S.J. Turnovsky(2014), “Capital accumulation and the sources of demographic change”, *Journal of Population Economics*, 27(3):857-894.

Smets, F. & R. Wouters(2007), “Shocks and frictions in US business cycles: A bayesian DSGE approach”, *American Economic Review*, 97(3):586-606.

Summers, L.(2014), “US economic prospects: Secular stagnation, hysteresis and the zero lower bound”, *Business Economic*, 49(2):65-74.

Zhang, H. et al(2015), “Demographic age structure and economic development: Evidence from Chinese provinces”, *Journal of Comparative Economics*, 43(1):170-185.

附录 1 回归使用数据描述性统计

变量	样本数	均值	标准差	最小值	最大值
R1	1486	0.0669	0.0440	0.0001	0.1950
R2	3531	0.0724	0.0461	0.0001	0.1993
R3	2484	0.0701	0.0458	0.0000	0.1995
R4	1668	0.0716	0.0392	-0.0036	0.1963
实际 GDP 增长率 (%)	8782	3.9152	6.3639	-64.0471	149.9730
劳动人口占比	10616	0.5892	0.0701	0.4527	0.8587
资本形成总额占 GDP 比重 (%)	7475	23.2348	8.7482	0.2929	95.3201
0-24	10661	0.5285	0.1222	0.2171	0.7045
25-44	10661	0.2591	0.0449	0.1470	0.6038
45-64	10661	0.1498	0.0555	0.0690	0.3202
65 岁及以上	10661	0.0626	0.0429	0.0075	0.2705
0-4	10661	0.1283	0.0475	0.0311	0.2159
5-9	10661	0.1154	0.0342	0.0329	0.1904
10-14	10661	0.1048	0.0250	0.0316	0.1741
15-19	10661	0.0947	0.0174	0.0359	0.1605
20-24	10661	0.0853	0.0123	0.0468	0.1402
25-29	10661	0.0767	0.0127	0.0373	0.1736
30-34	10661	0.0685	0.0134	0.0262	0.1822
35-39	10661	0.0607	0.0136	0.0205	0.1564
40-44	10661	0.0533	0.0140	0.0186	0.1234
45-49	10661	0.0465	0.0145	0.0170	0.0979
50-54	10661	0.0404	0.0149	0.0148	0.0919
55-59	10661	0.0344	0.0147	0.0118	0.0866
60-64	10661	0.0285	0.0140	0.0054	0.0779
65-69	10661	0.0228	0.0128	0.0033	0.0752
70-74	10661	0.0171	0.0111	0.0012	0.0656
75-79	10661	0.0117	0.0090	0.0003	0.0513
80 岁及以上	10661	0.0111	0.0112	0.0003	0.0811

附录2 人口结构与观测利率测算的自然利率基准估计结果系数汇总表

人口变量	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	固定效应				系统广义矩			
	R1	R2	R3	R4	R1	R2	R3	R4
0-4 岁人口占比	0.8431** (0.4148)	0.2818** (0.1207)	0.8740*** (0.2712)	1.1774*** (0.3530)	0.1412** (0.0556)	0.0826* (0.0479)	0.1205*** (0.0372)	0.1359** (0.0552)
5-9 岁人口占比	1.4626** (0.5013)	0.6046*** (0.1398)	1.3986*** (0.3409)	1.6699*** (0.3135)	0.1752*** (0.0639)	0.1375** (0.0611)	0.1765*** (0.0491)	0.1727*** (0.0671)
10-14 岁人口占比	2.0654*** (0.6440)	0.7944*** (0.1634)	1.6420*** (0.3619)	1.9395*** (0.2246)	0.2407*** (0.0875)	0.2136*** (0.0739)	0.2191*** (0.0585)	0.2484*** (0.0864)
15-19 岁人口占比	2.2628** (0.8757)	0.7315*** (0.1837)	1.4609*** (0.3514)	2.0914*** (0.2109)	0.3870*** (0.1443)	0.2915*** (0.0971)	0.2775*** (0.0816)	0.3759*** (0.1231)
20-24 岁人口占比	1.7117* (0.8891)	0.4320** (0.2112)	1.1208*** (0.3887)	2.0745*** (0.2901)	0.5443*** (0.1990)	0.3033** (0.1467)	0.3084*** (0.1027)	0.5256*** (0.1873)
25-29 岁人口占比	0.3124 (0.5274)	0.2374 (0.2059)	0.5281 (0.4228)	1.5089*** (0.3021)	0.1187 (0.1201)	0.1658 (0.1710)	-0.0004 (0.0917)	0.5238*** (0.2004)
30-34 岁人口占比	-0.4255 (0.6100)	0.2427 (0.1932)	-0.0373 (0.4521)	0.8671** (0.4304)	-0.3157** (0.1580)	0.0048 (0.1547)	-0.3334*** (0.1093)	0.0649 (0.0977)
35-39 岁人口占比	-0.5642 (0.7994)	0.1301 (0.2357)	-0.7614 (0.5224)	-0.4577 (0.5801)	-0.5282*** (0.1905)	-0.1308 (0.1444)	-0.4381*** (0.1110)	-0.4456*** (0.1685)
40-44 岁人口占比	-1.3209 (0.8091)	-0.2329 (0.2370)	-1.2020*** (0.4011)	-2.0274*** (0.3814)	-0.5598*** (0.1623)	-0.2154 (0.1397)	-0.4232*** (0.1147)	-0.5446*** (0.1786)
45-49 岁人口占比	-2.6717*** (0.7941)	-0.8768*** (0.2120)	-2.1352*** (0.3901)	-2.9734*** (0.3502)	-0.4556*** (0.1318)	-0.2957** (0.1282)	-0.4005*** (0.1011)	-0.4900*** (0.1468)
50-54 岁人口占比	-2.9039*** (0.8209)	-1.4214*** (0.2209)	-2.5396*** (0.3848)	-2.8332*** (0.3669)	-0.3306*** (0.1223)	-0.3372*** (0.1173)	-0.3681*** (0.0974)	-0.3845*** (0.1232)
55-59 岁人口占比	-2.5980*** (0.7162)	-1.3920*** (0.2174)	-2.4708*** (0.3755)	-2.1385*** (0.2664)	-0.3305** (0.1476)	-0.3454*** (0.1150)	-0.3211*** (0.0944)	-0.3602*** (0.1237)
60-64 岁人口占比	-1.5854** (0.7152)	-1.0320*** (0.2642)	-1.9536*** (0.3933)	-2.2103*** (0.3660)	-0.3163** (0.1403)	-0.3836*** (0.1205)	-0.2766*** (0.0917)	-0.3544** (0.1417)
65-69 岁人口占比	-2.1020*** (0.7587)	-1.1738*** (0.3066)	-1.8112*** (0.5560)	-2.7221*** (0.4425)	-0.3704** (0.1488)	-0.4048*** (0.1288)	-0.2789*** (0.0941)	-0.3578** (0.1404)
70-74 岁人口占比	-3.4491 (2.4040)	-2.0648*** (0.4873)	-2.7638*** (0.8110)	-4.0684*** (0.6491)	-0.3871** (0.1649)	-0.4020*** (0.1497)	-0.3128*** (0.1136)	-0.3387** (0.1399)
75-79 岁人口占比	-9.3007** (4.0113)	-3.7338*** (0.8236)	-5.3962*** (1.4878)	-5.1758*** (0.9127)	-0.4511** (0.1887)	-0.4661** (0.1821)	-0.3889*** (0.1341)	-0.3985** (0.1661)
80 岁及以上人口占比	-4.6062*** (1.1977)	-2.0229*** (0.5186)	-2.8646*** (0.6773)	-2.9497*** (0.2753)	-0.4174** (0.1614)	-0.3962*** (0.1315)	-0.3203*** (0.0993)	-0.3903*** (0.1442)

附录 3 部分理论模型推导过程^①

附录 3.1 包含人口年龄结构的封闭经济 IS 曲线推导

根据家庭决策优化问题，建立 Lagrange 函数为：

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{\left[w_t^y c_{it}^y \frac{\theta_t-1}{\theta_t} + (1-w_t^y) c_{it}^o \frac{\theta_t-1}{\theta_t} \right]^{\frac{\theta_t}{\theta_t-1}}}{1-\sigma_c} + \phi_m \frac{(m_{it})^{1-\sigma_m}}{1-\sigma_m} - \phi_l \frac{(l_{it})^{1+\sigma_l}}{1+\sigma_l} \right. \\ \left. - \lambda_t \left[c_{it}^y + c_{it}^o + m_{it} + b_{it} - \left(w_t l_{it} + \frac{m_{it-1}}{\pi_t} + R_t \frac{b_{it-1}}{\pi_t} + t_{it} \right) \right] \right] \quad (1)$$

家庭决策一阶条件为：

$$\left[w_t^y c_{it}^y \frac{\theta_t-1}{\theta_t} + (1-w_t^y) c_{it}^o \frac{\theta_t-1}{\theta_t} \right]^{\frac{\theta_t}{\theta_t-1}} \left[w_t^y c_{it}^y \frac{\theta_t-1}{\theta_t} + (1-w_t^y) c_{it}^o \frac{\theta_t-1}{\theta_t} \right]^{\frac{1}{\theta_t-1}} w_t^y c_{it}^y \frac{1}{\theta_t} = \lambda_t \quad (2)$$

$$\left[w_t^y c_{it}^y \frac{\theta_t-1}{\theta_t} + (1-w_t^y) c_{it}^o \frac{\theta_t-1}{\theta_t} \right]^{\frac{-\sigma_c \theta_t + 1}{\theta_t-1}} (1-w_t^y) c_{it}^o \frac{1}{\theta_t} = \lambda_t \quad (3)$$

$$\phi_m m_{it}^{-\sigma_m} - \lambda_t + \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}} = 0 \quad (4)$$

$$\phi_l l_{it}^{-\sigma_l} = \lambda_t w_t \quad (5)$$

$$\lambda_t - \beta E_t \frac{R_{t+1} \lambda_{t+1}}{\pi_{t+1}} = 0 \quad (6)$$

合并式 (2) 和 (3) 可得：

$$\left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{-\theta_t} c_{it}^y = c_{it}^o \quad (7)$$

假设最终产品用于少年消费和成年消费，则产品市场出清条件为：

$$y_t = c_t^y + c_t^o \quad (8)$$

结合式 (2) 和 (7) 可得：

$$\left[w_t^y c_{it}^y \frac{\theta_t-1}{\theta_t} + (1-w_t^y) \left(\left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{-\theta_t} c_{it}^y \right)^{\frac{\theta_t-1}{\theta_t}} \right]^{\frac{-\sigma_c \theta_t + 1}{\theta_t-1}} w_t^y c_{it}^y \frac{1}{\theta_t} = \lambda_t \quad (9)$$

化简式 (9) 可得：

^① 本部分公式推导重新编号。

$$\begin{aligned}
& \left[w_t^y c_{it}^y \frac{\theta_t-1}{\theta_t} + (1-w_t^y) \left(\left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{-\theta_t} \right)^{\frac{\theta_t-1}{\theta_t}} (c_{it}^y)^{\frac{\theta_t-1}{\theta_t}} \right]^{\frac{1-\sigma_c \theta_t}{\theta_t-1}} w_t^y c_{it}^y^{-\frac{1}{\theta_t}} = \lambda_t \\
& \left[w_t^y + (1-w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{1-\theta_t} \right]^{\frac{1-\sigma_c \theta_t}{\theta_t-1}} w_t^y (c_{it}^y)^{-\frac{\sigma_c \theta_t}{\theta_t}} = \lambda_t \\
& \left[w_t^y + (1-w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{1-\theta_t} \right]^{\frac{1-\sigma_c \theta_t}{\theta_t-1}} w_t^y (c_{it}^y)^{-\sigma_c} = \lambda_t \tag{10}
\end{aligned}$$

将式 (10) 代入式 (6):

$$\begin{aligned}
& \left[w_t^y + (1-w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{1-\theta_t} \right]^{\frac{1-\sigma_c \theta_t}{\theta_t-1}} w_t^y (c_t^y)^{-\sigma_c} \\
& = \beta E_t \frac{R_{t+1} \left[w_{t+1}^y + (1-w_{t+1}^y) \left(\frac{w_{t+1}^y}{1-w_{t+1}^y} \right)^{1-\theta_{t+1}} \right]^{\frac{1-\sigma_c \theta_{t+1}}{\theta_{t+1}-1}} w_{t+1}^y (c_{t+1}^y)^{-\sigma_c}}{\pi_{t+1}} \tag{11}
\end{aligned}$$

进一步本文不考虑随机替代弹性, 式 (11) 可以写为:

$$\begin{aligned}
& \left[w_t^y + (1-w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{1-\theta} \right]^{\frac{1-\sigma_c \theta}{\theta-1}} w_t^y (c_t^y)^{-\sigma_c} \\
& = \beta E_t \frac{R_{t+1} \left[w_{t+1}^y + (1-w_{t+1}^y) \left(\frac{w_{t+1}^y}{1-w_{t+1}^y} \right)^{1-\theta} \right]^{\frac{1-\sigma_c \theta}{\theta-1}} w_{t+1}^y (c_{t+1}^y)^{-\sigma_c}}{\pi_{t+1}} \tag{12}
\end{aligned}$$

化简式 (12) 可得:

$$\begin{aligned}
& \left[w_t^y + (1-w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{1-\theta} \right] w_t^{y \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} (c_t^y)^{-\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} \\
& = \beta^{\frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} E_t \frac{R_{t+1}^{\frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} \left[w_{t+1}^y + (1-w_{t+1}^y) \left(\frac{w_{t+1}^y}{1-w_{t+1}^y} \right)^{1-\theta} \right] w_{t+1}^{y \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} (c_{t+1}^y)^{-\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}}}{\pi_{t+1}^{\frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}}} \\
& w_t^{y \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} + 1} (c_t^y)^{-\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} + (1-w_t^y)^\theta (w_t^y)^{1-\theta + \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} (c_t^y)^{-\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} \\
& = \beta^{\frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} E_t \left(\frac{R_{t+1}}{\pi_{t+1}} \right)^{\frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} w_{t+1}^{y 1 + \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} (c_{t+1}^y)^{-\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} \\
& + \beta^{\frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} E_t \left(\frac{R_{t+1}}{\pi_{t+1}} \right)^{\frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} (1-w_{t+1}^y)^\theta (w_{t+1}^y)^{1-\theta + \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} (c_{t+1}^y)^{-\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} \tag{13}
\end{aligned}$$

式 (13) 对应的稳态方程为:

$$1 = \beta E_t \left(\frac{R_{ss}}{\pi_{ss}} \right) \quad (14)$$

在稳态附近求式 (13) 的对数线性化方程可得:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\theta-1}{1-\sigma_c\theta} + 1 \right) \hat{w}_t^y - \left(\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c\theta} \right) \hat{c}_t^y + \theta \hat{w}_t^o + \left(1-\theta + \frac{\theta-1}{1-\sigma_c\theta} \right) \hat{w}_t^y - \left(\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c\theta} \right) \hat{c}_t^y \\ & = 2 \left(\frac{\theta-1}{1-\sigma_c\theta} \right) E_t (\hat{R}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1}) + \left(1 + \frac{\theta-1}{1-\sigma_c\theta} \right) \hat{w}_{t+1}^y - \left(\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c\theta} \right) \hat{c}_{t+1}^y \\ & + \theta \hat{w}_{t+1}^o + \left(1-\theta + \frac{\theta-1}{1-\sigma_c\theta} \right) \hat{w}_{t+1}^y - \left(\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c\theta} \right) \hat{c}_{t+1}^y \end{aligned} \quad (15)$$

为简化书写, 本文令: $\frac{\theta-1}{1-\sigma_c\theta} = \vartheta$, 则式 (15) 可以改写为:

$$\begin{aligned} & (\vartheta+1) \hat{w}_t^y - 2\sigma_c\vartheta\hat{c}_t^y + \theta\hat{w}_t^o + (1-\theta+\vartheta) \hat{w}_t^y \\ & = 2\vartheta E_t (\hat{R}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1}) + (1+\vartheta) \hat{w}_{t+1}^y - 2\sigma_c\vartheta\hat{c}_{t+1}^y + \theta\hat{w}_{t+1}^o + (1-\theta+\vartheta) \hat{w}_{t+1}^y \\ 2\sigma_c\vartheta(\hat{c}_{t+1}^y - \hat{c}_t^y) & = 2\vartheta E_t (\hat{R}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1}) + (2+2\vartheta-\theta)(\hat{w}_{t+1}^y - \hat{w}_t^y) + \theta(\hat{w}_{t+1}^o - \hat{w}_t^o) \end{aligned} \quad (16)$$

由于 $\frac{w_{ss}^y}{w_{ss}^y-1} \hat{w}_t^y = \hat{w}_t^o$, 则式 (16) 可以进一步化简为:

$$\sigma_c\vartheta(\hat{c}_{t+1}^y - \hat{c}_t^y) = \vartheta E_t (\hat{R}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1}) + \left(1+\vartheta - \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{w_{ss}^y}{1-w_{ss}^y} \right) \right) (\hat{w}_{t+1}^y - \hat{w}_t^y) \quad (17)$$

根据式 (7) 和 (8):

$$y_t = \left[1 + \left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{-\theta} \right] c_t^y \quad (18)$$

则有:

$$\begin{aligned} y_t & = c_t^y + \left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{-\theta} c_t^y \\ y_t & = c_t^y + \left(\frac{w_t^y}{w_t^o} \right)^{-\theta} c_t^y \end{aligned} \quad (19)$$

式 (19) 对应的稳态方程为:

$$y_{ss} = \left[1 + \left(\frac{w_{ss}^y}{w_{ss}^o} \right)^{-\theta} \right] c_{ss}^y \quad (20)$$

在稳态附近求式 (20) 的对数线性化方程为:

$$y_{ss}\hat{y}_t = c_{ss}^y \hat{c}_t^y + \left(\frac{w_{ss}^y}{w_{ss}^o}\right)^{-\theta} c_{ss}^y \left[-\theta_t (\hat{w}_t^y - \hat{w}_t^o) + \hat{c}_t^y\right]$$

$$\hat{y}_t = \hat{c}_t^y - \theta \left(\frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}}\right) (\hat{w}_t^y - \hat{w}_t^o) \quad (21)$$

结合 $\frac{w_{ss}^y}{w_{ss}^y - 1} \hat{w}_t^y = \hat{w}_t^o$, 式 (21) 可以写为:

$$\hat{y}_t = \hat{c}_t^y - \theta \left(\frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}}\right) \left(1 - \frac{w_{ss}^y}{w_{ss}^y - 1}\right) \hat{w}_t^y$$

$$\hat{y}_t = \hat{c}_t^y + \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \hat{w}_t^y$$

$$\hat{c}_t^y = \hat{y}_t - \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \hat{w}_t^y \quad (22)$$

进一步结合 $\sigma_c \mathcal{G}(\hat{c}_{t+1}^y - \hat{c}_t^y) = \mathcal{G}E_t(\hat{R}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1}) + \left(1 + \mathcal{G} - \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{w_{ss}^y}{1 - w_{ss}^y}\right)\right) (\hat{w}_{t+1}^y - \hat{w}_t^y)$,

可以从家庭决策的一阶条件中导出封闭经济的 IS 曲线为:

$$\sigma_c \mathcal{G} \left(\hat{y}_{t+1} - \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \hat{w}_{t+1}^y - \hat{y}_t + \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \hat{w}_t^y \right)$$

$$= \mathcal{G}E_t(\hat{R}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1}) + \left(1 + \mathcal{G} - \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{w_{ss}^y}{1 - w_{ss}^y}\right)\right) (\hat{w}_{t+1}^y - \hat{w}_t^y)$$

$$\sigma_c \mathcal{G}(\hat{y}_{t+1} - \hat{y}_t) - \sigma_c \mathcal{G} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} (\hat{w}_{t+1}^y - \hat{w}_t^y)$$

$$= \mathcal{G}E_t(\hat{R}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1}) + \left(1 + \mathcal{G} - \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{w_{ss}^y}{1 - w_{ss}^y}\right)\right) (\hat{w}_{t+1}^y - \hat{w}_t^y) \quad (23)$$

整理并化简, 本文得到包含人口结构的封闭经济 IS 曲线:

$$\sigma_c \mathcal{G}(\hat{y}_{t+1} - \hat{y}_t) = \mathcal{G}E_t(\hat{R}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1}) + \left(1 + \mathcal{G} - \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{w_{ss}^y}{1 - w_{ss}^y}\right) + \sigma_c \mathcal{G} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}}\right) (\hat{w}_{t+1}^y - \hat{w}_t^y) \quad (24)$$

其中, $\frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} = \mathcal{G}$

附录 3.2 包含人口年龄结构的新凯恩斯菲利普斯曲线推导

中间产品生产厂商利用劳动进行生产，生产过程由 C-D 生产函数刻画。产品供最终产品生产使用，产量依据最终产品市场需求确定。劳动由家庭直接提供。中间产品市场对劳动的需求取决于工资水平，以及最终产品市场对中间产品的需求。中间产品厂商生产函数由(25)式刻画。

$$y_{jt} = A_t (l_{jt}^d)^{1-\alpha} \quad (25)$$

式(25)中 y_{jt} 为第 j 类中间产品的总供给， l_{jt}^d 生产第 j 类中间产品所使用的劳动， A_t 为全要素生产率，满足外生 AR(1)过程； $1-\alpha$ 为劳动产出占总产出的比重。

假设中间产品市场垄断竞争，遵循 Calvo 策略定价。设每期能够进行价格调整的厂商比例为 $(1-\theta_p)$ 。如果中间厂商在 t 期进行了价格调整， $t+1$ 期中间产品价格为 $p_{j,t+1} = \pi_t^p p_{jt}$ ， π_t 表示最终产品市场通货膨胀水平， χ_p 表示中间产品市场和最终产品市场的通货膨胀水平之比。中间产品生产厂商最优定价策略可以等价于求解最优化问题(26)和(27)式。

$$\max_{p_{jt}} \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \theta_p)^s \frac{\lambda_{t+s}^1}{\lambda_t^1} \left\{ \left[\left(\pi_t^{\chi_p} \pi_{t+1}^{\chi_p} \dots \pi_{t+s-1}^{\chi_p} \right) \frac{p_{jt}}{p_{t+s}} - mc_{t+s} \right] y_{jt+s} \right\} \quad (26)$$

$$st: y_{jt+s} = \left[\left(\pi_t^{\chi_p} \pi_{t+1}^{\chi_p} \dots \pi_{t+s-1}^{\chi_p} \right) \frac{p_{jt}}{p_{t+s}} \right]^{-\varepsilon} y_{t+s} \quad (27)$$

其中， mc_t 为生产中间产品的边际成本。

求解式(26)和(27)，最优价格水平 p_t^* 可以写为 $p_t^* = p_t^1/p_t^2$ ，其中 p_t^1 和 p_t^2 由(28)和(29)式决定。

$$p_t^1 = \left[\varepsilon / (\varepsilon - 1) \right] \lambda_t^1 mc_t y_t + \pi_t^{-\chi_p \varepsilon} \beta \theta_p E_t \left[p_{t+1}^1 \pi_{t+1}^{\chi_p \varepsilon} \right] \quad (28)$$

$$p_t^2 = \lambda_t y_t + \pi_t^{\chi_p (1-\varepsilon)} \beta \theta_p E_t \left[p_{t+1}^2 \pi_{t+1}^{\chi_p (\varepsilon-1)} \right] \quad (29)$$

中间产品市场的价格由单个厂商价格加总而得，化简后的加总方程为：

$$p_t = \left[\theta_p \left(\pi_{t-1}^{\chi_p} p_{t-1} \right)^{1-\varepsilon} + (1-\theta_p) \left(p_t^1 / p_t^2 \right)^{1-\varepsilon} \right]^{1/(1-\varepsilon)} \quad (30)$$

式(28)中， λ_t 是与家庭优化问题相关的 Lagrange 乘子，这是联系家庭决策问题和厂商决策问题的纽带。

对于式(28)：

$$p_t^1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \lambda_t^1 mc_t y_t + \pi_t^{-\chi_p \varepsilon} \beta \theta_p E_t \left[p_{t+1}^1 \pi_{t+1}^{\chi_p \varepsilon} \right]$$

$$p_{ss}^1 (1 + \hat{p}_t^1) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \lambda_{ss}^1 mc_{ss} y_{ss} \left(1 + \hat{\lambda}_t^1 + \hat{mc}_t + \hat{y}_t \right) + \beta \theta_p p_{ss}^1 E_t \left[1 + \hat{p}_{t+1}^1 + \chi_p \varepsilon \hat{\pi}_{t+1} - \chi_p \varepsilon \hat{\pi}_t \right]$$

$$p_{ss}^1 \hat{p}_t^1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \lambda_{ss}^1 mc_{ss} y_{ss} \left(\hat{\lambda}_t^1 + \hat{mc}_t + \hat{y}_t \right) + \beta \theta_p p_{ss}^1 E_t \left[\hat{p}_{t+1}^1 + \chi_p \varepsilon \hat{\pi}_{t+1} - \chi_p \varepsilon \hat{\pi}_t \right]$$

$$\hat{p}_t^1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \frac{\lambda_{ss}^1 mc_{ss} y_{ss}}{p_{ss}^1} \left(\hat{\lambda}_t^1 + \hat{mc}_t + \hat{y}_t \right) + \beta \theta_p E_t \left[\hat{p}_{t+1}^1 + \chi_p \varepsilon \hat{\pi}_{t+1} - \chi_p \varepsilon \hat{\pi}_t \right] \quad (31)$$

式 (31) 对应的稳态方程为:

$$1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \frac{\lambda_{ss}^1 mc_{ss} y_{ss}}{p_{ss}^1} + \beta \theta_p \quad (32)$$

在稳态附近求解式 (31) 的对数线性化方程为:

$$\hat{p}_t^1 = (1 - \beta \theta_p) \left(\hat{\lambda}_t^1 + \hat{mc}_t + \hat{y}_t \right) + \beta \theta_p E_t \left[\hat{p}_{t+1}^1 + \chi_p \varepsilon \hat{\pi}_{t+1} - \chi_p \varepsilon \hat{\pi}_t \right] \quad (33)$$

类似地, 对于式 (29):

$$\begin{aligned} p_t^2 &= \lambda_t^1 y_t + \pi_t^{\chi_p(1-\varepsilon)} \beta \theta_p E_t \left[p_{t+1}^2 \pi_{t+1}^{\chi_p(\varepsilon-1)} \right] \\ p_{ss}^2 (1 + \hat{p}_t^2) &= \lambda_{ss}^1 y_{ss} (1 + \hat{\lambda}_t^1 + \hat{y}_t) + \beta \theta_p p_{ss}^2 E_t \left[1 + \hat{p}_{t+1}^2 + \chi_p (\varepsilon - 1) \hat{\pi}_{t+1} - \chi_p (\varepsilon - 1) \hat{\pi}_t \right] \\ p_{ss}^2 \hat{p}_t^2 &= \lambda_{ss}^1 y_{ss} (\hat{\lambda}_t^1 + \hat{y}_t) + \beta \theta_p p_{ss}^2 E_t \left[\hat{p}_{t+1}^2 + \chi_p (\varepsilon - 1) \hat{\pi}_{t+1} - \chi_p (\varepsilon - 1) \hat{\pi}_t \right] \\ \hat{p}_t^2 &= (1 - \beta \theta_p) (\hat{\lambda}_t^1 + \hat{y}_t) + \beta \theta_p E_t \left[\hat{p}_{t+1}^2 + \chi_p (\varepsilon - 1) \hat{\pi}_{t+1} - \chi_p (\varepsilon - 1) \hat{\pi}_t \right] \end{aligned} \quad (34)$$

同样地, 对于式 (30):

$$\begin{aligned} p_t &= \left[\theta_p (p_{t-1} / \pi_t)^{1-\varepsilon} + (1 - \theta_p) (p_t^1 / p_t^2)^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \\ p_t^{1-\varepsilon} &= \theta_p \left(\frac{p_{t-1}}{\pi_t} \right)^{1-\varepsilon} + (1 - \theta_p) \left(\frac{p_t^1}{p_t^2} \right)^{1-\varepsilon} \\ 1 &= \theta_p \left(\frac{1}{\pi_t} \right)^{1-\varepsilon} + (1 - \theta_p) \left(\frac{p_t^1}{p_t^2} \right)^{1-\varepsilon} \\ 1 &= \theta_p (\pi_{ss})^{\varepsilon-1} (1 + (\varepsilon - 1) \hat{\pi}_t) + (1 - \theta_p) \left(\frac{p_{ss}^1}{p_{ss}^2} \right)^{1-\varepsilon} (1 + (1 - \varepsilon) (\hat{p}_t^1 - \hat{p}_t^2)) \end{aligned} \quad (35)$$

由于 $\pi_{ss} = 1$, 则 $\frac{p_{ss}^1}{p_{ss}^2} = 1$ 。

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_p (\varepsilon - 1) \hat{\pi}_t + (1 - \theta_p) (1 - \varepsilon) (\hat{p}_t^1 - \hat{p}_t^2) \\ \frac{\theta_p}{1 - \theta_p} \hat{\pi}_t &= \hat{p}_t^1 - \hat{p}_t^2 \end{aligned} \quad (36)$$

结合 (28)、(29) 和 (30) 式的对数线性化方程, 可得:

$$\hat{p}_t^1 - \hat{p}_t^2 = \left[\begin{aligned} &(1 - \beta \theta_p) \left(\hat{\lambda}_t^1 + \hat{mc}_t + \hat{y}_t \right) + \beta \theta_p E_t \left[\hat{p}_{t+1}^1 + \chi_p \varepsilon \hat{\pi}_{t+1} - \chi_p \varepsilon \hat{\pi}_t \right] \\ &-(1 - \beta \theta_p) (\hat{\lambda}_t^1 + \hat{y}_t) - \beta \theta_p E_t \left[\hat{p}_{t+1}^2 + \chi_p (\varepsilon - 1) \hat{\pi}_{t+1} - \chi_p (\varepsilon - 1) \hat{\pi}_t \right] \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
\hat{p}_t^1 - \hat{p}_t^2 &= (1 - \beta\theta_p) \hat{m}c_t + \beta\theta_p E_t \left[\hat{p}_{t+1}^1 - \hat{p}_{t+1}^2 + \chi_p \hat{\pi}_{t+1} - \chi_p \hat{\pi}_t \right] \\
\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} \hat{\pi}_t &= (1 - \beta\theta_p) \hat{m}c_t + \beta\theta_p E_t \left[\left(\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \chi_p \right) \hat{\pi}_{t+1} - \chi_p \hat{\pi}_t \right] \\
\left(\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p \chi_p \right) \hat{\pi}_t &= (1 - \beta\theta_p) \hat{m}c_t + \beta\theta_p \left(\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \chi_p \right) E_t \left[\hat{\pi}_{t+1} \right]
\end{aligned} \tag{37}$$

可以得到新凯恩斯菲利普斯曲线为：

$$\hat{\pi}_t = \frac{1 - \beta\theta_p}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p \chi_p} \hat{m}c_t + \frac{\beta\theta_p \left(\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \chi_p \right)}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p \chi_p} E_t \left[\hat{\pi}_{t+1} \right] \tag{38}$$

本文需要将式（38）写为产出缺口的形式，因此需要寻找边际成本与产出缺口的联系。中间产品生产厂商的一阶条件为：

$$w_t = mc_t \alpha A_t l_t^{-\alpha} \tag{39}$$

则边际成本可以写为：

$$mc_t = \frac{w_t}{\alpha A_t l_t^{-\alpha}} = \frac{w_t l_t}{\alpha y_t} \tag{40}$$

根据居民决策一阶条件有：

$$\left[w_t^y + (1 - w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1 - w_t^y} \right)^{1 - \theta_t} \right]^{\frac{1 - \sigma_c \theta_t}{\theta_t - 1}} w_t^y (c_{it}^y)^{-\sigma_c} = \lambda_t \tag{41}$$

$$\frac{\phi_t l_t^{-\sigma_l}}{\lambda_t} = w_t \tag{42}$$

$$\hat{c}_t^y = \hat{y}_t - \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \hat{w}_t^y \tag{43}$$

合并并整理可得：

$$w_t = \frac{\phi_t l_t^{-\sigma_l}}{\left[w_t^y + (1 - w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1 - w_t^y} \right)^{1 - \theta_t} \right]^{\frac{1 - \sigma_c \theta_t}{\theta_t - 1}} w_t^y (c_{it}^y)^{-\sigma_c}} \tag{44}$$

对于式（40），对数线性化方程为：

$$\hat{m}c_t = \hat{w}_t + \hat{l}_t - \hat{y}_t \tag{45}$$

对于式（42），对数线性化方程为：

$$\begin{aligned}
& \left[w_t^y + (1-w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{1-\theta} \right]^{\frac{1-\sigma_c \theta}{\theta-1}} w_t^y (c_{it}^y)^{-\sigma_c} w_t = \phi_l l_t^{-\sigma_l} \\
& \left[w_t^y + (1-w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1-w_t^y} \right)^{1-\theta} \right] w_t^{y \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} (c_{it}^y)^{-\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} w_t^{\frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} = \phi_l l_t^{-\sigma_l \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} \\
& w_t^y + (1-w_t^y)^\theta (w_t^y)^{1-\theta} = \frac{\phi_l l_t^{-\sigma_l \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}}}{w_t^{y \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} (c_{it}^y)^{-\sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}} w_t^{\frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}}} \\
& w_{ss}^y \hat{w}_t^y + (w_{ss}^o)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} (\theta \hat{w}_t^o + (1-\theta) \hat{w}_t^y) = \left(w_{ss}^y + (1-w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right) * \\
& \left[-\sigma_l \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} \hat{l}_t - \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} \hat{w}_t^y + \sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} \hat{c}_t^y - \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} \hat{w}_t \right] \\
& \left[w_{ss}^y + (1-w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \left(\theta \frac{w_{ss}^y}{w_{ss}^y - 1} + (1-\theta) \right) + \left(w_{ss}^y + (1-w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right) \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} \right] \hat{w}_t^y \\
& + \left[\sigma_l \left(w_{ss}^y + (1-w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right) \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} \right] \hat{l}_t \tag{46} \\
& = \left[\left(w_{ss}^y + (1-w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right) \sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} \right] \hat{c}_t^y - \left[\left(w_{ss}^y + (1-w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right) \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} \right] \hat{w}_t
\end{aligned}$$

为了书写方便，本文定义以下过渡参数：

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= w_{ss}^y + (1-w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \left(\theta \frac{w_{ss}^y}{w_{ss}^y - 1} + (1-\theta) \right) + \left(w_{ss}^y + (1-w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right) \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} \\
\kappa_2 &= \sigma_l \left(w_{ss}^y + (1-w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right) \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} \\
\kappa_3 &= \left(w_{ss}^y + (1-w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right) \sigma_c \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta} \\
\kappa_4 &= \left(w_{ss}^y + (1-w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right) \frac{\theta-1}{1-\sigma_c \theta}
\end{aligned}$$

则式（46）的对数线性化形式可以写为

$$\hat{w}_t = \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \hat{c}_t^y - \frac{\kappa_1}{\kappa_4} \hat{w}_t^y - \frac{\kappa_2}{\kappa_4} \hat{l}_t \tag{47}$$

将式（47）代入式（45）可得：

$$\hat{m}c_t = \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4} - 1 \right) \hat{y}_t - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_4} + \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \right) \hat{w}_t^y - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \hat{l}_t$$

$$\begin{aligned} \hat{mc}_t = & \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4} - 1 - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) \hat{y}_t - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_4} + \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \right) \hat{w}_t^y \\ & + \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \hat{A}_t \end{aligned} \quad (48)$$

对于短期供给函数，根据居民决策一阶条件和生产函数我们有：

$$\left[w_t^y + (1 - w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1 - w_t^y} \right)^{1 - \theta_t} \right]^{\frac{1 - \sigma_c \theta_t}{\theta_t - 1}} w_t^y (c_{it}^y)^{-\sigma_c} = \lambda_t$$

$$\phi_l l_t^{-\sigma_l} = \frac{\alpha (\theta_p - 1)}{\theta_p} \frac{y_t^n}{l_t} \lambda_t$$

$$\hat{c}_t^y = \hat{y}_t^n - \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \hat{w}_t^y$$

$$y_t = A_t (l_t)^{1 - \alpha}$$

则：

$$\phi_l l_t^{-\sigma_l} = \frac{\alpha (\theta_p - 1)}{\theta_p} \frac{y_t^n}{l_t} \lambda_t$$

$$\begin{aligned} \phi_l \left(\frac{y_t^n}{A_t} \right)^{\frac{1 - \sigma_l}{1 - \alpha}} &= \frac{\alpha (\theta_p - 1)}{\theta_p} y_t^n w_t^y (c_{it}^y)^{-\sigma_c} \left[w_t^y + (1 - w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1 - w_t^y} \right)^{1 - \theta_t} \right]^{\frac{1 - \sigma_c \theta_t}{\theta_t - 1}} \\ &= \frac{\phi_l^{\frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}} \left(\frac{y_t^n}{A_t} \right)^{\frac{1 - \sigma_l}{1 - \alpha} \frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}}}{\left[\frac{\alpha (\theta_p - 1)}{\theta_p} \right]^{\frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}} y_t^{n \frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}} w_t^{y \frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}} (c_{it}^y)^{-\sigma_c \frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}}} = w_t^y + (1 - w_t^y) \left(\frac{w_t^y}{1 - w_t^y} \right)^{1 - \theta_t} \end{aligned} \quad (49)$$

式 (49) 对应的稳态方程为：

$$\begin{aligned} \phi_l^{\frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}} \left(\frac{y_{ss}^n}{A_{ss}} \right)^{\frac{1 - \sigma_l}{1 - \alpha} \frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}} &= w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y) \left(\frac{w_{ss}^y}{1 - w_{ss}^y} \right)^{1 - \theta_t} \\ \left[\frac{\alpha (\theta_p - 1)}{\theta_p} \right]^{\frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}} y_{ss}^{n \frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}} w_{ss}^{y \frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}} (c_{ss}^y)^{-\sigma_c \frac{\theta_t - 1}{1 - \sigma_c \theta_t}} & \end{aligned} \quad (50)$$

则短期总供给函数为：

$$\begin{aligned} & \left[w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y) \left(\frac{w_{ss}^y}{1 - w_{ss}^y} \right)^{1-\theta} \right] \left[\frac{1 - \sigma_l}{1 - \alpha} \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} (\hat{y}_t^n - \hat{A}_t) - \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} \hat{y}_t^n \right. \\ & \left. - \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} \hat{w}_t^y + \sigma_c \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} \hat{c}_t^y \right] \\ & = w_{ss}^y \hat{w}_t^y + (1 - w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \left[\theta \hat{w}_t^o + (1 - \theta) \hat{w}_t^y \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y) \left(\frac{w_{ss}^y}{1 - w_{ss}^y} \right)^{1-\theta} \right] \frac{1 - \sigma_l}{1 - \alpha} \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} (\hat{y}_t^n - \hat{A}_t) \\ & - \left[w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y) \left(\frac{w_{ss}^y}{1 - w_{ss}^y} \right)^{1-\theta} \right] \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} \hat{y}_t^n \\ & - \left[w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y) \left(\frac{w_{ss}^y}{1 - w_{ss}^y} \right)^{1-\theta} \right] \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} \hat{w}_t^y \\ & + \left[w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y) \left(\frac{w_{ss}^y}{1 - w_{ss}^y} \right)^{1-\theta} \right] \sigma_c \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} \left[\hat{y}_t - \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \hat{w}_t^y \right] \\ & = w_{ss}^y \hat{w}_t^y + (1 - w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \left[\theta \frac{w_{ss}^y}{w_{ss}^y - 1} \hat{w}_t^y + (1 - \theta) \hat{w}_t^y \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left[w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right] \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} \left(\frac{1 - \sigma_l}{1 - \alpha} - 1 + \sigma_c \right) \hat{y}_t^n \right. \\ & \left. - \left[w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right] \frac{1 - \sigma_l}{1 - \alpha} \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} \hat{A}_t \right] \\ & = \left[\begin{aligned} & w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \left[\theta \frac{w_{ss}^y}{w_{ss}^y - 1} + (1 - \theta) \right] \\ & + \left[w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right] \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} \\ & + \left[w_{ss}^y + (1 - w_{ss}^y)^\theta (w_{ss}^y)^{1-\theta} \right] \sigma_c \frac{\theta - 1}{1 - \sigma_c \theta} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \end{aligned} \right] \hat{w}_t^y \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1 - \sigma_l}{1 - \alpha} \kappa_4 - \kappa_4 + \kappa_3 \right) \hat{y}_t^n - \frac{1 - \sigma_l}{1 - \alpha} \kappa_4 \hat{A}_t = \left[\kappa_1 + \kappa_3 \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \right] \hat{w}_t^y$$

$$\hat{A}_t = \frac{1 - \alpha}{1 - \sigma_l} \left(\frac{1 - \sigma_l}{1 - \alpha} - 1 + \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \right) \hat{y}_t^n - \frac{1 - \alpha}{1 - \sigma_l} \left[\frac{\kappa_1}{\kappa_4} + \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \right] \hat{w}_t^y \quad (51)$$

将式 (51) 代入边际成本表达式 (48):

$$\begin{aligned}
\hat{mc}_t &= \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4} - 1 - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) \hat{y}_t - \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_4} + \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \right) \hat{w}_t^y + \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \hat{A}_t \\
\hat{mc}_t &= \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4} - 1 - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) \hat{y}_t + \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{1-\alpha}{1-\sigma_l} \left(\frac{1-\sigma_l}{1-\alpha} - 1 + \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \right) \hat{y}_t^n \\
&\quad - \left[\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{1-\alpha}{1-\sigma_l} + 1 \right] \left[\frac{\kappa_1}{\kappa_4} + \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \right] \hat{w}_t^y \\
\hat{mc}_t &= \left(\sigma_c - 1 - (\sigma_l - 1) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) \hat{y}_t - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \left(\sigma_c - (\sigma_l - 1) - \frac{\sigma_l - 1}{1-\alpha} \right) \hat{y}_t^n \\
&\quad - \left[\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{1-\alpha}{1-\sigma_l} + 1 \right] \left[\frac{\kappa_1}{\kappa_4} + \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \right] \hat{w}_t^y \tag{52}
\end{aligned}$$

因此，新菲利普斯曲线可以写为：

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_t &= \frac{1 - \beta\theta_p}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p\chi_p} \left[\left(\sigma_c - 1 - (\sigma_l - 1) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) \hat{y}_t - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \left(\sigma_c - (\sigma_l - 1) - \frac{\sigma_l - 1}{1-\alpha} \right) \hat{y}_t^n \right. \\
&\quad \left. - \left[\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{1-\alpha}{1-\sigma_l} + 1 \right] \left[\frac{\kappa_1}{\kappa_4} + \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \right] \hat{w}_t^y \right] \\
&\quad + \frac{\beta\theta_p \left(\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \chi_p \right)}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p\chi_p} E_t [\hat{\pi}_{t+1}] \\
\hat{\pi}_t &= \frac{1 - \beta\theta_p}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p\chi_p} \left(\sigma_c - 1 - (\sigma_l - 1) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) \hat{y}_t \\
&\quad - \frac{1 - \beta\theta_p}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p\chi_p} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \left(\sigma_c - (\sigma_l - 1) - \frac{\sigma_l - 1}{1-\alpha} \right) \hat{y}_t^n \\
&\quad - \frac{1 - \beta\theta_p}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p\chi_p} \left[\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{1-\alpha}{1-\sigma_l} + 1 \right] \left[\frac{\kappa_1}{\kappa_4} + \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \right] \hat{w}_t^y \\
&\quad + \frac{\beta\theta_p \left(\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \chi_p \right)}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p\chi_p} E_t [\hat{\pi}_{t+1}]
\end{aligned}$$

令：

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1 - \beta\theta_p}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p\chi_p} \left(\sigma_c - 1 - (\sigma_l - 1) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) \\ \psi_2 &= \frac{1 - \beta\theta_p}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p\chi_p} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \left(\sigma_c - (\sigma_l - 1) - \frac{\sigma_l - 1}{1 - \alpha} \right) \\ \psi_3 &= \frac{\beta\theta_p \left(\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \chi_p \right)}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p\chi_p} \\ \psi_4 &= \frac{1 - \beta\theta_p}{\frac{\theta_p}{1 - \theta_p} + \beta\theta_p\chi_p} \left[\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_4} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{1 - \alpha}{1 - \sigma_l} + 1 \right] \left[\frac{\kappa_1}{\kappa_4} + \frac{\kappa_3}{\kappa_4} \frac{\theta}{w_{ss}^y - 1} \frac{y_{ss} - c_{ss}^y}{y_{ss}} \right]\end{aligned}$$

则包含人口年龄结构的新凯恩斯菲利普斯曲线为：

$$\hat{\pi}_t = \psi_1 \hat{y}_t - \psi_2 \hat{y}_t^n + \psi_3 E_t [\hat{\pi}_{t+1}] - \psi_4 \hat{w}_t^y \quad (53)$$

附录 3.3 不包含人口年龄结构的 DSGE 模型推导

家庭 i 每期收入包括工资收入、持有债券收入，用于消费、持有实际货币余额和购买债券。参考 Fernández-Villaverde 等（2010）等文献对家庭行为进行刻画，假设家庭 i 的效用函数包括消费 c_{it} 、劳动 l_{it} 和实际货币余额 M_{it}/p_t ，效用函数形式如（54）式。该效用函数形式保证相对风险回避系数不变，同时保证消费和实际货币持有量边际效用为正，劳动供给边际效用为负。家庭决策问题可由（54）式和（55）式表示的优化问题进行描述。

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_{it}^{1-\sigma_c}}{1-\sigma_c} + \phi_m \frac{(M_{it}/p_t)^{1-\sigma_m}}{1-\sigma_m} - \phi_l \frac{(l_{it})^{1+\sigma_l}}{1+\sigma_l} \right] \quad (54)$$

$$s.t: c_{it} + M_{it}/p_t + B_{it}/p_t = w_t l_{it} + M_{it-1}/p_t + R_t B_{it-1}/p_t \quad (55)$$

式（54）中， c_{it} 、 M_{it} 、 l_{it} 分别为实际消费、名义货币余额、实际劳动供给， p_t 为价格水平， β 表示家庭主观贴现率； σ_c 、 σ_m 和 σ_l 分别表示消费、现金持有和提供劳动的相对风险回避系数， ϕ_m 和 ϕ_l 分别为实际货币余额和劳动在效用函数中的权重。式（55）中， B_{it} 为持有债券数量， w_t 为实际工资水平， R_t 为名义债券收益率。

家庭决策一阶条件为：

$$c_{it}^{-\sigma_c} = \lambda_t \quad (56)$$

$$\phi_m m_{it}^{-\sigma_m} - \lambda_t + \beta E_t (\lambda_{t+1} / \pi_{t+1}) = 0 \quad (57)$$

$$\phi_l l_{it}^{-\sigma_l} = \lambda_t w_t \quad (58)$$

$$\lambda_t - \beta E_t (R_{t+1} \lambda_{t+1} / \pi_{t+1}) = 0 \quad (59)$$

其中， λ_t 为家庭决策拉格朗日乘子， π_t 为通货膨胀率，表示为 $\pi_t = p_t/p_{t-1}$ 。

本文从家庭决策的一阶条件中，可以导出封闭经济的 IS 曲线：

$$\sigma_c (\hat{y}_{t+1} - \hat{y}_t) = E_t (\hat{R}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1}) \quad (60)$$

其中， \hat{y}_t 、 R_t 、 $\hat{\pi}_t$ 分别为对数线性化后的实际产出、名义利率和通货膨胀。

家庭消费和投资由最终产品进行提供，最终产品生产厂商利用中间产品进行生产。设中间产品连续分布于区间[0,1]，由于最终产品市场完全竞争，最终产品生产优化问题可以由（61）和（62）式进行刻画。其中 y_t 表示最终产品供给， y_{jt} 为第 j 类中间产品总需求， p_{jt} 为第 j 类中间产品价格水平。

$$\max_{y_{jt}} p_t y_t - \int_0^1 p_{jt} y_{jt} dj \quad (61)$$

$$s.t: y_t = \left(\int_0^1 y_{jt}^{(\varepsilon-1)/\varepsilon} dj \right)^{\varepsilon/(\varepsilon-1)} \quad (62)$$

其中， ε 为中间产品替代弹性。

最终厂商最优决策一阶条件为：

$$y_{jt} = (p_{jt} / p_t)^{-\varepsilon} y_t \quad (63)$$

$$p_t = \left(\int_0^1 p_{jt}^{1-\varepsilon} dj \right)^{1/(1-\varepsilon)} \quad (64)$$

中间产品生产厂商利用劳动进行生产，生产过程由 C-D 生产函数刻画。产品供最终产品生产使用，产量依据最终产品市场需求确定。劳动由家庭直接提供。中间产品市场对劳动的需求取决于工资水平，以及最终产品市场对中间产品的需求。中间产品厂商生产函数由 (65) 式刻画。

$$y_{jt} = A_t (l_{jt}^d)^{1-\alpha} \quad (65)$$

式 (65) 中 y_{jt} 为第 j 类中间产品的总供给， l_{jt}^d 生产第 j 类中间产品所使用的劳动， A_t 为全要素生产率，满足外生 AR(1) 过程； $1-\alpha$ 为劳动产出占总产出的比重。

假设中间产品市场垄断竞争，遵循 Calvo 策略定价。设每期能够进行价格调整的厂商比例为 $(1-\theta_p)$ 。如果中间厂商在 t 期进行了价格调整， $t+1$ 期中间产品价格为 $p_{j,t+1} = \pi_t^p p_{jt}$ ， π_t 表示最终产品市场通货膨胀水平， χ_p 表示中间产品市场和最终产品市场的通货膨胀水平之比。中间产品生产厂商最优定价策略可以等价于求解最优化问题 (66) 和 (67) 式。

$$\max_{p_{jt}} \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \theta_p)^s (\lambda_{t+s} / \lambda_t) \left\{ \left[\left(\pi_t^{\chi_p} \pi_{t+1}^{\chi_p} \dots \pi_{t+s-1}^{\chi_p} \right) p_{jt} / p_{t+s} - mc_{t+s} \right] y_{j,t+s} \right\} \quad (66)$$

$$s.t. : y_{j,t+s} = \left[\left(\pi_t^{\chi_p} \pi_{t+1}^{\chi_p} \dots \pi_{t+s-1}^{\chi_p} \right) p_{jt} / p_{t+s} \right]^{-\varepsilon} y_{t+s} \quad (67)$$

其中， mc_t 为生产中间产品的边际成本。

求解式 (66) 和 (67)，最优价格水平 p_t^* 可以写为 $p_t^* = p_t^1 / p_t^2$ ，其中 p_t^1 和 p_t^2 由 (68) 和 (69) 式决定。

$$p_t^1 = \left[\varepsilon / (\varepsilon - 1) \right] \lambda_t mc_t y_t + \pi_t^{-\chi_p \varepsilon} \beta \theta_p E_t \left[p_{t+1}^1 \pi_{t+1}^{\chi_p \varepsilon} \right] \quad (68)$$

$$p_t^2 = \lambda_t y_t + \pi_t^{\chi_p (1-\varepsilon)} \beta \theta_p E_t \left[p_{t+1}^2 \pi_{t+1}^{\chi_p (\varepsilon-1)} \right] \quad (69)$$

中间产品市场的价格由单个厂商价格加总而得，化简后的加总方程为：

$$p_t = \left[\theta_p \left(\pi_{t-1}^{\chi_p} p_{t-1} \right)^{1-\varepsilon} + (1-\theta_p) \left(p_t^1 / p_t^2 \right)^{1-\varepsilon} \right]^{1/(1-\varepsilon)} \quad (70)$$

本文从厂商决策一阶条件中能够推导出新凯恩斯菲利普斯曲线，即 AS 曲线为：

$$\hat{\pi}_t = \frac{\kappa \chi}{\kappa + \beta \theta_p \chi} \hat{\pi}_{t-1} + \frac{(1-\beta \theta_p)(\varphi-1)}{\kappa + \beta \theta_p \chi_p} (\hat{y}_t - \hat{y}_t^n) + \frac{\beta \theta_p (\kappa + \chi_p)}{\kappa + \beta \theta_p \chi_p} E_t [\hat{\pi}_{t+1}] \quad (71)$$

其中， y_t^n 为对数线性化后的潜在产出。为简化书写，引入 $\vartheta \equiv \theta_p / (1-\theta_p)$ ， $\varphi \equiv (1-\sigma_l) / (1-\alpha)$ 为过渡参数。

此外，本文假设中央银行调控遵循 Taylor 规则，表示为：

$$R_t / R = (R_{t-1} / R)^{\gamma_R} \left[\left(\pi_t / \pi \right)^{\gamma_\pi} \left[\left(y_t / y_t^n \right) / \Lambda y^d \right]^{1-\gamma_\pi} \right]^{1-\gamma_R} \quad (72)$$

其中， R 、 π 、 Λy^d 为稳态名义利率、稳态通货膨胀和稳态产出缺口， γ_R 、 γ_π 、 γ_π 分别为利率参数、价格参数和产出参数。

式 (72) 对数线性化并化简：

$$\hat{R}_t = \gamma_R \hat{R}_{t-1} + (1 - \gamma_R) [\gamma_\pi \hat{\pi}_t + \gamma_y (\hat{y}_t - \hat{y}_t^n)] \quad (73)$$

定义 $\theta_p=0$ 时的利率和产出为自然利率与潜在产出。由此可得：

$$(1 - 1/\varphi) \hat{y}_t^n = \hat{A}_t \quad (74)$$

$$\sigma_c \mathcal{G}(\hat{y}_{t+1}^n - \hat{y}_t^n) = \mathcal{G} E_t \hat{R}_{t+1}^n \quad (75)$$

其中， R_t^n 为对数线性化后的自然利率。

附录4 人口结构与DSGE模型测算的自然利率估计结果系数汇总表

人口变量	(1)	(2)
	固定效应	系统广义矩
0-4 岁人口占比	0.6163*** (0.1514)	0.2847*** (0.0789)
5-9 岁人口占比	0.7724*** (0.1704)	0.3894*** (0.1058)
10-14 岁人口占比	0.9558*** (0.2110)	0.5802*** (0.1516)
15-19 岁人口占比	1.0251*** (0.2805)	0.6923*** (0.2158)
20-24 岁人口占比	0.0850 (0.3387)	0.1359 (0.2160)
25-29 岁人口占比	-1.2351*** (0.3482)	-0.5154** (0.2253)
30-34 岁人口占比	-1.5776*** (0.3930)	-0.4386* (0.2340)
35-39 岁人口占比	-2.0273*** (0.4456)	-0.7657*** (0.2437)
40-44 岁人口占比	-1.5932*** (0.3818)	-0.6544*** (0.2049)
45-49 岁人口占比	-1.1809*** (0.4014)	-0.6559*** (0.2276)
50-54 岁人口占比	-1.0945*** (0.4158)	-0.9487*** (0.2686)
55-59 岁人口占比	-1.0511** (0.4583)	-1.1393*** (0.3488)
60-64 岁人口占比	-1.2445*** (0.4493)	-1.3659*** (0.3785)
65-69 岁人口占比	-1.6741*** (0.5914)	-0.5452 (0.4346)
70-74 岁人口占比	-2.8346*** (0.7912)	-0.4392 (0.4872)
75-79 岁人口占比	-4.1393*** (0.8101)	-1.0581** (0.4663)
80 岁及以上人口占比	-2.1073*** (0.4773)	-0.6892*** (0.2425)